

Q
56
S7

ANNALES

DE LA

SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE

DE BRUXELLES

ASSOCIATION SANS BUT LUCRATIF

TOME SOIXANTE-QUATRIÈME, 1950

SÉRIE I

SCIENCES MATHÉMATIQUES, ASTRONOMIQUES
ET PHYSIQUES

PREMIER ET DEUXIÈME FASCICULES

22 JUIN 1950



*Publié avec le concours de la Fondation universitaire de Belgique
et du Gouvernement*

LOUVAIN

Secrétariat de la Société Scientifique

11, RUE DES RÉCOLLETS, 11

Chèques postaux 2027.48

1950

Publication trimestrielle. Prix de ce fascicule séparé : 50 frs

TABLE DES MATIÈRES

Session du 26 janvier 1950, à Bruxelles.

PREMIÈRE SECTION : Sciences mathématiques et astronomiques

	PAGE
A propos du tranchet d'Archimède, par M. V. Thébault	5
Les fonctions hypergéométriques d'ordre supérieur à deux variables, par M. F. Ceschino	13
Quelques propriétés des matrices H, par M. M. Parodi	22
Sur certains systèmes linéaires d'équations aux dérivées partielles du troisième ordre (suite et fin), par M. R. Germy	26

DEUXIÈME SECTION : Sciences physiques et chimiques

La récession des nébuleuses extra-galactiques (5 ^e partie), par M. P. Dru- maux	31
---	----

Session du 27 avril 1950, à Bruxelles.

PREMIÈRE SECTION : Sciences mathématiques et astronomiques

Points et droites remarquables du tétraèdre, par M. V. Thébault	39
Sur les triangles autopolaires des polarités planes, par M. R. Ballieu ..	48
Fonctions de Bessel et calcul symbolique, par M. P. Humbert	55
Sur les équations récurrentes, aux différentielles totales, complètement intégrables, par M. R. Germy	62
Sur la différentielle totale, par M. Ch. de La Vallée Poussin	74

DEUXIÈME SECTION : Sciences physiques et chimiques

Constitution du Bureau de la Section	76
Application des méthodes de la mécanique céleste au problème de Störmer, par M. G. Lemaître	76
Contributions à la théorie des effets de latitude et d'asymétrie des rayons cosmiques. La pénombre au voisinage de l'équateur, par M. R. De Vogelaere	83
Sur certains systèmes pancratiques, par M. A. Biot	93
Sur une unité absolue de quantité de couleur et son emploi, par M. A. Biot	111
Transformation graphique des coordonnées colorimétriques, par A. Biot	115
Équipement électronique des jauges à vide de la machine de Van de Graaff de Louvain, par MM. G. Tavernier et Y. Hecq	120

Le prix d'ABONNEMENT aux ANNALES, série I, pour des personnes ne faisant pas
partie de la Société scientifique, est fixé comme suit :

<i>en Belgique, au Congo-Belge et au Luxembourg</i>	70 fr.
<i>dans les autres pays</i>	120 fr.

SESSION DU 26 JANVIER 1950

A BRUXELLES

Première Section

Sciences Mathématiques et Astronomiques

A propos du tranchet d'Archimède

PAR

Victor THÉBAULT, Tennie (France)

Cette note a pour objet d'étendre à l'espace à trois dimensions des propriétés de la figure dite *tranchet d'ARCHIMÈDE* et de mettre en évidence deux tétraèdres spéciaux, l'un orthocentrique, l'autre isodynamique.

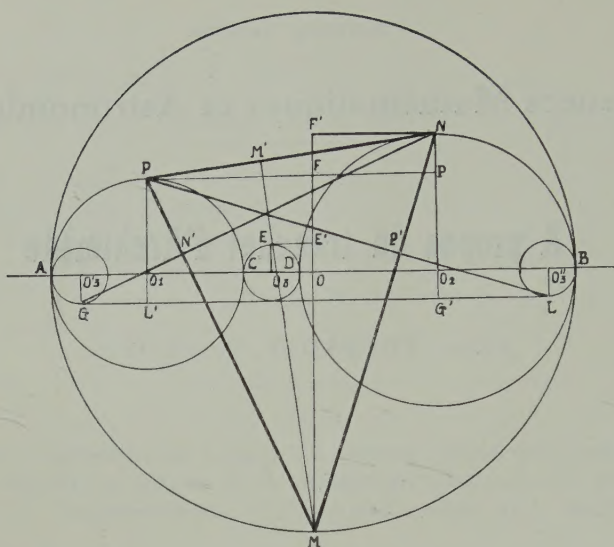
1. Sur un diamètre $AB = 2R$ d'une circonférence (0) , de centre O , on marque deux points C, D , entre A et B , et l'on décrit les circonférences $(O_1), (O_2), (O_3)$, de centres O_1, O_2, O_3 , sur $AC = 2r_1, DB = 2r_2, CD = \pm 2r_3$, comme diamètres. Soient M, N, P les milieux des demi-circonférences (0) , au-dessous de AB , $(O_1), (O_2)$, au-dessus de AB ; P' la projection orthogonale du point P sur la droite O_2N ; E' celle d'une des extrémités E du diamètre de la circonférence (O_3) perpendiculaire à AB , sur la droite MO .

Les hypoténuses NP, ME des triangles rectangles $NPP', ME'E$ dont les côtés

$$PP' = O_1O_2 = O_1C + CD + DB = r_1 + r_2 \pm 2r_3 = R \pm r_3 = ME',$$

$$P'N = |r_1 - r_2| = O_3O = EE',$$

sont égaux et perpendiculaires, sont orthogonales, et la hauteur MM' du triangle MNP passe par le point E . De même, si l'on construit une circonférence (O'_3) , de rayon $\pm r_3$, tangente en A à (0) , une circonférence (O''_3) , de rayon $\pm r_3$, tangente à (0) en B , et que G, L désignent une des extrémités des diamètres de $(O'_3), (O''_3)$ perpendiculaires à AB , F, G', L', F' les projections orthogonales des points M, G, L, N sur PP', O_2N, O_1P, MO , les triangles rectangles MFP et NGG', MNF' et $PL'L$ sont orthogonalement égaux et les hauteurs NN', PP' du triangle MNP passent par les points G, L .



CONCLUSION. Les hauteurs MM' , NN' , PP' du triangle MNP passent respectivement par une des extrémités des diamètres, perpendiculaires à AB , de la circonférence (0_3) et de deux circonférences $(0'_3)$, $(0'_3')$, égales à celle-ci, convenablement choisies et tangentes à la circonférence (0) en A et B .

CAS PARTICULIER : *Tranchet d'Archimède*. Les circonférences (0) , (0_1) , (0_2) sont tangentes deux à deux, et $C \equiv D$, $r_3 = 0$. Dans cette hypothèse : les hauteurs MM' , NN' , PP' du triangle MNP passent respectivement par les points $C \equiv D$, A , B , et l'orthocentre est sur la circonférence inscrite au tranchet, à égale distance de ce centre et de la droite AB ⁽¹⁾.

N. B. La hauteur MM' du triangle MNP rencontre visiblement la droite AB en l'un des centres de similitude des circonférences (0) et (0_3) qui est donc confondu avec le pied de l'axe radical des circonférences (0_1) et (0_2) .

⁽¹⁾ Ces propriétés connues sont caractéristiques du triangle MNP dans lequel la cotangente de l'angle de BROCARD est égale à 2, dont nous avons donné de nombreuses propriétés.

2. Considérons quatre sphères (O_i) , $(i = a, b, c, d)$, tangentes trois à trois, de rayons R_i , dont les centres O_i sont dans un même plan (P) , et les sphères (O'_a) , (O'_b) , (O'_c) , (O'_d) , de rayons R'_i , tangentes respectivement aux trois sphères $[(O_b), (O_c), (O_d)]$, $[(O_c), (O_d), (O_a)]$, $[(O_d), (O_a), (O_b)]$, $[(O_a), (O_b), (O_c)]$. Pour fixer les idées, on peut admettre, sans altérer la généralité du raisonnement, que les sphères (O_b) , (O_c) , (O_d) sont intérieures à la sphère (O_a) et extérieures à la sphère (O'_a) .

a) THÉORÈME. Les points de rencontre A, B, C, D des diamètres des sphères (O_a) , (O_b) , (O_c) , (O_d) , perpendiculaires au plan (P) , respectivement avec les sphères (O_a) , au-dessous de (P) , (O_b) , (O_c) , (O_d) , au-dessus de (P) , sont les sommets d'un tétraèdre ORTHOCENTRIQUE $T \equiv ABCD$ dont les hauteurs AA', BB', CC', DD' passent par les points A_1, B_1, C_1, D_1 où les diamètres des sphères (O'_a) , (O'_b) , (O'_c) , (O'_d) , perpendiculaires au plan (P) , rencontrent celles-ci, au-dessus de ce plan. Le tétraèdre T est orthocentrique. Car, au simple examen de la figure, on obtient

$$(1) \quad \overline{BC}^2 = (R_b + R_c)^2 + (R_b - R_c)^2 = 2(R_b^2 + R_c^2)$$

$$(2) \quad \overline{AD}^2 = (R_a + R_d)^2 + (R_a - R_d)^2 = 2(R_a^2 + R_d^2),$$

et

$$\overline{BC}^2 + \overline{AD}^2 = 2(R_a^2 + R_b^2 + R_c^2 + R_d^2) = \overline{CA}^2 + \overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{CD}^2.$$

Les tétraèdres $A_1BCD, B_1CDA, C_1DAB, D_1ABC$ sont orthocentriques. En effet, on a aussi, d'abord

$$\overline{A_1D}^2 = (R'_a + R_d)^2 + (R_d - R'_a)^2 = 2(R'^2_a + R_d^2),$$

puis, en vertu de (1),

$$\overline{BC}^2 + \overline{A_1D}^2 = 2(R'^2_a + R_b^2 + R_c^2 + R_d^2) = \overline{BD}^2 + \overline{A_1C}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{A_1B}^2;$$

et ainsi de suite pour les tétraèdres B_1CDA, C_1DAB, D_1ABC .

Les hauteurs AA', BB', CC', DD' du tétraèdre T passent par les points A_1, B_1, C_1, D_1 . Car les tétraèdres orthocentriques T et A_1BCD , T et B_1CDA , T et C_1DAB , T et D_1ABC ayant une face commune, BCD, CDA, DAB, ABC , les hauteurs de ces deux tétraèdres sont portées par une même droite, AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 .

N. B. 1° La hauteur AA' qui coupe le plan (P) en l'un des centres de similitude des sphères (O_a) et (O'_a) passe par le pied de l'axe radical des sphères (O_b) , (O_c) , (O_d) .

2° Les relations (1), (2) entre les carrés des arêtes $BC = a$, $AD = a'$, les expressions connues des carrés des bimédianes MN , ST , UV et celles des carrés des bihauteurs δ_a , δ_b , δ_c relatives aux arêtes opposées BC et AD , CA et BD , AB et CD (1), donnent, d'abord,

$$\overline{MN}^2 = \overline{ST}^2 = \overline{UV}^2 = \frac{1}{2} (R_a^2 + R_b^2 + R_c^2 + R_d^2),$$

$$\delta_a^2 = 2 \left[\frac{(R_b R_c)^2}{R_b^2 + R_c^2} + \frac{(R_a R_d)^2}{R_a^2 + R_d^2} \right], \dots,$$

puis

$$36V^2 = (aa'\delta_a)^2 = 8\Sigma (R_b R_c R_d)^2 = 8K, \text{ et } 3V = \sqrt{2K},$$

V désignant le volume du tétraèdre T.

b) Les deux sphères (ω, σ) et (ω', σ) , tangentes avec quatre sphères (O_i) , sont symétriques par rapport au plan (P).

THÉORÈME. *La distance du centre de la sphère (ω, σ) au plan (P) est égale au côté du triangle équilatéral inscrit dans un grand cercle de cette sphère.*

Transformons la figure formée par les quatre sphères (O_i) et la sphère (ω, σ) , au-dessus du plan (P), par une inversion dont le pôle est le point de contact Q des sphères (O_a) et (O_c) , ayant pour module la puissance du point Q pour la sphère (O_b) . Celle-ci se conserve; les sphères (O_a) , (O_c) deviennent les plans (A), (C) tangents à (O_b) et perpendiculaires à la droite Q O_b . D'autre part, la sphère (O_d) se transforme en une sphère (Ω_d) tangente simultanément à la sphère (O_b) et aux plans (A), (C), donc égale à (O_b) . La sphère (ω, σ) devient une sphère (Ω_1, σ_1) tangente, à la fois, aux sphères (O_b) , (Ω_d) et aux plans (A), (C), dont le rayon $\sigma_1 = R_b$.

Le centre Ω_1 de cette sphère coïncide donc avec le sommet d'un triangle équilatéral $\Omega_1 O_b \Omega_d$ construit sur $O_b \Omega_d$ dans le plan équidistant de (A) et (C) et perpendiculaire à (P).

(1) Cfr. COUDERC et BALLICIONI, *Premier Livre sur le tétraèdre*, pp. 97 et 106.

La distance $\Omega_1 \Omega'_1$ du centre Ω_1 de la sphère (Ω_1, σ_1) au plan (P) est égale à

$$\frac{1}{2} O_a \Omega_d \cdot \sqrt{3} = \frac{1}{2} \cdot 2R_b \cdot \sqrt{3} = R_b \sqrt{3};$$

comme les sphères (ω, σ) , (Ω_1, σ_1) se correspondent dans une homothétie de centre Q, on obtient

$$\frac{\omega \omega_1}{\sigma} = \frac{\Omega_1 \Omega'_1}{\sigma_1} = \frac{R_b \sqrt{3}}{R_b} = \sqrt{3},$$

$\omega \omega_1$ étant la distance du centre ω de (ω, σ) au plan (P), et le théorème est démontré.

Note. M. R. BOUVAIST nous a communiqué la formule

$$\sigma = \frac{R_a \tan \theta}{1 + \tan \theta},$$

θ étant l'angle de BROCARD du triangle ayant pour sommets les points de contact de la sphère (O_a) avec les sphères (O_b) , (O_c) , (O_d) .

3. A. 1° Considérons un triangle $T \equiv ABC$ inscrit à un cercle (O), de centre O et de rayon R, et un cercle (ω_a) tangent au premier en A. L'inversion (A, $4R^2$) ⁽¹⁾ transforme le cercle (O) en sa tangente Δ au point A' diamétralement opposé à A sur celui-ci et le cercle (ω_a) en une droite Δ' parallèle à Δ . Le cercle (ω_b) , tangent à (O) en B, et tangent à (ω_a) et le cercle (ω_c) , tangent à (O) en C, et tangent à (ω_b) , deviennent les cercles (ω'_b) et (ω'_c) tangents à Δ aux points A_1 et A_2 où AB et AC rencontrent Δ ; en outre (ω'_b) est tangent à Δ . La condition nécessaire et suffisante pour que les cercles (ω_a) , (ω_b) , (ω_c) soient tangents deux à deux et tangents à (O) en A, B, C, est donc que le cercle (ω'_c) touche simultanément le cercle (ω'_b) et les droites Δ' , Δ . S'il en est ainsi, les cercles (ω'_b) , (ω'_c) sont égaux, tangents entre eux, et leur diamètre, égal à $A_1 A_2$, est déterminé par le triangle T. Les transformés de la droite Δ' et des cercles (ω'_b) , (ω'_c) ainsi déterminés, par l'inversion (A, $4R^2$) sont donc tangents deux à deux et tangents au cercle (O) en A, B, C (*Cercles de LUCAS*) ⁽²⁾.

⁽¹⁾ Le module de cette inversion permet de calculer facilement les rayons des cercles de LUCAS.

⁽²⁾ E. LUCAS, *Mathesis*, 1889-182. — V. THÉBAULT, *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1920-94. — *Annales*, t. XL, 1920-63, t. LV, 1935-120.

2° Les cercles d'APOLLONIUS (M_a) , (M_b) , (M_c) de T, relatifs aux côtés BC, CA, AB, et les cercles (A') , (B') , (C') ayant pour centres les pôles A' , B' , C' des côtés BC, CA, AB par rapport au cercle (O) se rencontrent aux points de contact de deux cercles (ω_b) et (ω_c) , (ω_c) et (ω_a) , (ω_a) et (ω_b) , et les centres radicaux Ω , Ω' des *premiers* et des *seconds* cercles de LUCAS, ayant mêmes puissances pour les cercles d'APOLLONIUS, sont situés sur le diamètre de BROCARD OK, K étant le point de LEMOINE de T ⁽¹⁾.

THÉORÈME. *Le quaterne (O, K, Ω , Ω') est harmonique.* En effet, Les cercles (O), (A') , (M_a) sont deux à deux orthogonaux. La polaire du point A'' , où la symédiane AK rencontre le côté BC, par rapport au cercle (M_a) , perpendiculaire à BC, se confond avec la droite OA' et la polaire de A' pour (M_a) passe par A'' .

Les points de contact Ma , Ma' de (M_a) avec les deux couples de cercles de LUCAS (ω_b) et (ω_c) sont donc alignés avec O et A'' . La division (O, A'', M_a, M'_a) et, par suite, le quaterne (O, K, Ω, Ω') sont donc harmoniques.

Note. Les points Ω , Ω' divisent OK dans les rapports

$$\frac{\overline{\Omega O}}{\overline{\Omega K}} = \frac{\overline{\Omega' O}}{\overline{\Omega' K}} = \pm \frac{1}{2} \cot V,$$

V étant l'angle de BROCARD du triangle T.

Les cercles (Ω) et (Ω') , orthogonaux aux *premiers* et aux *seconds* cercles de LUCAS, ont pour rayons

$$\sigma = \frac{R}{\cot V + 2} \quad , \quad \sigma' = \frac{R}{\cot V - 2}.$$

Ces formules donnent les propriétés suivantes du triangle spécial prérappelé, où $\cot V = 2$, que la figure met du reste en évidence.

Les premiers cercles de LUCAS sont orthogonaux au cercle décrit sur OK comme diamètre et les centres des seconds cercles de LUCAS appartiennent à la droite de LEMOINE.

B. 1° THÉORÈME. *Pour qu'il existe quatre sphères (ω_a) , (ω_b) , (ω_c) , (ω_d) tangentes trois à trois et tangentes à la sphère circonscrite (O) à un tétraèdre $T \equiv ABCD$ aux sommets A, B, C, D, il faut et il suffit que le tétraèdre T soit ISODYNAMIQUE ⁽²⁾.*

(1) V. THÉBAULT, *Annales*, loc. cit.

(2) V. THÉBAULT, *Annales*, 1935, loc. cit.

La condition est nécessaire. Quatre sphères (ω_a) , (ω_b) , (ω_c) , (ω_d) étant tangentes trois à trois et tangentes à la sphère (O) en A, B, C, D, une inversion (A, λ) transforme (O) et (ω_a) en deux plans (P), (P') perpendiculaires à AO, tandis que les sphères (ω_b) , (ω_c) , (ω_d) deviennent des sphères tangentes aux plans (P), (P'), donc égales entre elles, leurs points de contact avec le plan (P) étant les points de rencontre B_1 , C_1 , D_1 des arêtes AB, AC, AD avec celui-ci. D'autre part, le triangle $B_1C_1D_1$ est équilatéral; d'après les propriétés de l'inversion,

$$B_1C_1 = BC \cdot \frac{\lambda}{AB \cdot A} = C_1D_1 = CD \cdot \frac{\lambda}{AC \cdot DA} = D_1B_1 = DB \cdot \frac{\lambda}{AB \cdot DA}$$

ce qui donne

$$BC \cdot CA = CA \cdot DB = AB \cdot DC,$$

et le tétraèdre T est isodynamique.

La condition est suffisante. Si le tétraèdre T est isodynamique, une inversion (A, λ) transforme les sommets B, C, D en ceux d'un triangle équilatéral $B_1C_1D_1$ aux sommets duquel on peut construire trois sphères égales entre elles, tangentes deux à deux et tangentes au plan $(P) \equiv B_1C_1D_1$ et à un autre plan (P') parallèle au premier. Les transformés du plan (P') et des trois sphères égales qui lui sont tangentes par une inversion (A, λ) sont quatre sphères tangentes trois à trois et tangentes à la sphère (O) aux sommets A, B, C, D de T. (*sphères de LUCAS*) ⁽¹⁾.

2° Suivant le signe de λ , il y a deux quadruples de sphères de LUCAS (*premières et secondes*) relatives à un tétraèdre isodynamique T.

Les sphères d'APOLLONIUS (M_a) , (M_b) , (M_c) , (M'_a) , (M'_b) , (M'_c) correspondant aux arêtes BC, CA, AB, DA, DB, DC ⁽²⁾ et les sphères (A'), (B'), (C'), (D'), ayant pour centres les pôles A', B', C', D' des faces BCD, CDA, DAB, ABC de T par rapport à la sphère circonscrite (O) et orthogonales à celle-ci, passent par les points de contact de deux sphères de LUCAS d'un même groupe. Les centres radicaux Ω , Ω' des quatre sphères de chaque groupe, ayant mêmes puissances par rapport aux sphères d'APOLLONIUS, sont sur le diamètre de BROCARD OL, L étant le *second* point de LEMOINE du tétraèdre T où concourent les symédianes AA', BB', CC', DD'.

(1) V. THÉBAULT, *Annales*, 1935, loc. cit.

(2) J. NEUBERG, *Mémoire sur le tétraèdre*, 1884-46.

THÉORÈME. Le quaterne (O, L, Ω, Ω') est harmonique. En effet, le tétraèdre T étant isodynamique, la symédiane AL, A' passe par le point de LEMOINE K du triangle BCD et les sphères $(O), (A'), (M_a)$ sont deux à deux orthogonales.

Le plan polaire de K pour la sphère (M_a) est perpendiculaire à la droite $M_a K$, donc normal au point BCD , et il contient la droite OA' . Par suite, le plan polaire du point A' , par rapport à (M_a) , passe par K et comme ce point est dans le plan (O, A', Ω, Ω') , les points de contact A_3, A'_3 de la sphère (M_a) avec les droites $A'\Omega, A'\Omega'$ sont alignés sur O et K . La division (O, K, A_3, A'_3) et, par suite, le quaterne (O, L, Ω, Ω') , sont donc harmoniques.

Note. Les points Ω, Ω' partagent OL dans les rapports ⁽¹⁾

$$\frac{\overline{O\Omega}}{\overline{\Omega L}} = \frac{\overline{\Omega'O}}{\overline{\Omega'L}} = \pm \frac{\sqrt{3}}{6} \cot V,$$

V étant l'angle de BROCARD du tétraèdre isodynamique, T défini par J. NEUBERG ⁽²⁾.

Les sphères $(\Omega), (\Omega')$ orthogonales aux *premières* et *secondes* sphères de LUCAS ont pour rayons

$$(3) \quad \rho = \frac{2R}{\cot V + 2\sqrt{3}}, \quad \rho' = \frac{2R}{\cot V - 2\sqrt{3}}. \quad (4)$$

4. TÉTRAÈDRE ISODYNAMIQUE SPÉCIAL. La configuration des quatre sphères (O_i) du paragraphe 2 et de la sphère (ω, σ) tangente à celles-ci en A_2, B_2, C_2, D_2 , mettent en évidence un tétraèdre isodynamique $T_2 \equiv A_2 B_2 C_2 D_2$ dont les *secondes* sphères de LUCAS (O_i) ont leurs centres O_i situés dans le plan de LEMOINE de ce tétraèdre.

D'autre part, le centre radical Ω' de ces sphères étant à l'infini sur le diamètre de BROCARD ωL_2 de T_2 , le centre radical des *premières* sphères de LUCAS coïncide avec le milieu du segment ωL_2 et ces sphères coupent orthogonalement celle qui est décrite sur ωL_2 comme diamètre. Ces propriétés résultent aussi des formules (3), (4) dans le tétraèdre isodynamique spécial T_2 , où $\cot V = 2\sqrt{3}$; il y a analogie complète avec le triangle particulier où $\cot V = 2$.

(5 octobre 1949).

⁽¹⁾ Cfr. R. BLANCHARD, *Mathesis*, LVIII-335.

⁽²⁾ *Mémoire sur le tétraèdre*, p. 34.

Les fonctions hypergéométriques d'ordre supérieur à deux variables

PAR

F. CESCHINO

La fonction hypergéométrique de GAUSS a été généralisée de deux façons différentes, d'une part par POCHHAMMER (*J. Rein. u. an. Math.* t. LXXI), d'autre part par CLAUSEN (*J. Rein. u. an. Math.* t. III), MELLIN (*Acta Societ. Fennicae* t. XX, XXI, XXIII) PINCHERLE (*Giorn. Mat.* t. XXXII) et GOURSAT (*Ann. Ec. Norm.* t. XII). Ce second point de vue a été appliqué par Mr KAMPÉ de FÉRIET (Fonct. hypergéométriques et hypersphériques, 1926) à la généralisation des fonctions d'APPELL à deux variables. C'est le premier point de vue que nous allons étendre aux fonctions hypergéométriques à deux variables.

1. Soit l'intégrale :

$$H_n \left(\begin{matrix} a_1 & a_2 \dots & a_n x y \\ b_1 & b_2 \dots & b_n \lambda \mu \end{matrix} \right) = \int_g^h (u-a_1)^{b_1-1} (u-a_2)^{b_2-1} \dots (u-a_n)^{b_n-1} (u-x)^{\lambda-1} (u-y)^{\mu-1} du$$

où g et h peuvent prendre les valeurs $a_1, a_2 \dots x, y, \infty$ et où les a_i sont supposés différents entre eux et différents de ∞ .

Nous nous proposons d'abord d'établir le système différentiel vérifié par H_n .

$H_{r,s}$ désignant la dérivée d'ordre r par rapport à x et d'ordre s par rapport à y , on voit que :

$$(1) \quad H_{r,s} = (-1)^{r+s} (\lambda-1)(\lambda-2)\dots(\lambda-r)(\mu-1)(\mu-2)\dots(\mu-s) \int_U (u-x)^{\lambda-r-1} (u-y)^{\mu-s-1} du$$

où

$$U = (u-a_1)^{b_1-1} \dots (u-a_n)^{b_n-1}.$$

Posons

$$G = (u - a_1)^{b_1} \dots (u - a_n)^{b_n} (u - x)^{\lambda-n} (u - y)^{\mu-1} ;$$

on trouve

$$(2) \frac{\partial G}{\partial u} = b_1 [(u - a_2) (u - a_3) \dots (u - a_n)] U(u - x)^{\lambda-n} (u - y)^{\mu-1} \\ + b_2 [(u - a_1) (u - a_3) \dots (u - a_n)] U(u - x)^{\lambda-n} (u - y)^{\mu-1} \\ + \dots \dots \dots \\ + b_n [(u - a_1) (u - a_2) \dots (u - a_{n-1})] U(u - x)^{\lambda-n} (u - y)^{\mu-1} \\ + (\lambda - n) [(u - a_1) (u - a_2) \dots (u - a_n)] U(u - x)^{\lambda-n-1} (u - y)^{\mu-1} \\ + (\mu - 1) [(u - a_1) (u - a_2) \dots (u - a_n)] U(u - x)^{\lambda-n} (u - y)^{\mu-2}$$

Développons suivant les puissances de $(u - x)$ la partie entre crochets de la $(n + 1)^{\text{me}}$ ligne, multiplions cette ligne par du et intégrons entre les limites g et h ; on obtient, en tenant compte de (1),

$$\frac{(-)^n H_{n,0}}{(\lambda-1) \dots (\lambda-n+1)} f + \frac{(-)^{n-1} H_{n-1,0} (\lambda-n)}{(\lambda-1) \dots (\lambda-n+1)} f'_x + \frac{(-)^{n-2} H_{n-2,0} (\lambda-n) f''_x{}^2}{(\lambda-1) \dots (\lambda-n+2) 2!} + \dots$$

en posant

$$f = (x - a_1) (x - a_2) \dots (x - a_n) .$$

Les n premières lignes donneront de même

$$\frac{(-)^{n-1} H_{n-1,0}}{(\lambda-1) \dots (\lambda-n+1)} v + \frac{(-)^{n-2} H_{n-2,0}}{(\lambda-1) \dots (\lambda-n+2)} v'_x + \frac{(-)^{n-3} H_{n-3,0}}{(\lambda-1) \dots (\lambda-n+3)} \frac{v''_x{}^2}{2!} + \dots$$

où

$$v = f \left[\frac{b_1}{x - a_1} + \frac{b_2}{x - a_2} + \dots + \frac{b_n}{x - a_n} \right] .$$

Enfin, la $(n + 2)^{\text{me}}$ ligne donnera

$$\frac{(-)^n H_{n-1,1}}{(\lambda-1) \dots (\lambda-n+1)} h + \frac{(-)^{n-1} H_{n-2,1}}{(\lambda-1) \dots (\lambda-n+2)} h'_x + \frac{(-)^{n-2} H_{n-3,1}}{(\lambda-1) \dots (\lambda-n+3)} \frac{h''_x{}^2}{2!} + \dots \\ + \frac{(-)^{n-1} H_{n-1,0}}{(\lambda-1) \dots (\lambda-n+1)} w + \frac{(-)^{n-2} H_{n-2,0}}{(\lambda-1) \dots (\lambda-n+2)} w'_x + \frac{(-)^{n-3} H_{n-3,0}}{(\lambda-1) \dots (\lambda-n+3)} \frac{w''_x{}^2}{2!} + \dots$$

avec

$$h = (y - a_1) (x - a_2) (x - a_3) \dots (x - a_n)$$

et

$$w = f (\mu - 1) \frac{1}{x - a_1}$$

Multiplications enfin les deux membres de (2) par $(\lambda - 1)(\lambda - 2) \dots (\lambda - n + 1)$ et remarquons que

$$\int_{\varepsilon}^h dG = 0 ;$$

on obtient le système de deux équations aux dérivées partielles d'ordre n , dans lequel nous poserons

$$\varphi = v + w$$

et que nous désignerons par (I) ,

$$\begin{aligned} & (-)^n f P_{n,o} + (-)^{n-1} \left[(\lambda - n) \frac{\partial f}{\partial x} + \varphi \right] P_{n-1,o} + \\ & (-)^{n-2} (\lambda - n + 1) \left[\frac{\lambda - n}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] P_{n-2,o} + \\ & (-)^{n-3} \frac{(\lambda - n + 1)(\lambda - n + 2)}{2!} \left[\frac{\lambda - n}{3} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right] P_{n-3,o} + \dots - \\ & \frac{(\lambda - n + 1) \dots (\lambda - 2)}{(n - 2)!} \left[\frac{\lambda - n}{n - 1} \cdot \frac{\partial^{n-1} f}{\partial x^{n-1}} + \frac{\partial^{n-2} \varphi}{\partial x^{n-2}} \right] P_{1,o} + \\ & \frac{(\lambda - n + 1) \dots (\lambda - 2)(\lambda - 1)}{(n - 1)!} \left[\frac{\lambda - n}{n} \cdot \frac{\partial_n f}{\partial x^n} + \frac{\partial^{n-1} \varphi}{\partial x^{n-1}} \right] P_{0,o} + \\ & (-)^n h P_{n-1,1} + (-)^{n-1} (\lambda - n + 1) \frac{\partial h}{\partial x} P_{n-2,1} + \\ & (-)^{n-2} \frac{(\lambda - n + 1)(\lambda - n + 2)}{2!} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} P_{n-3,1} + \dots \\ & + \frac{(\lambda - n + 1) \dots (\lambda - 2)}{(n - 2)!} \frac{\partial^{n-2} h}{\partial x^{n-2}} P_{11} - \frac{(\lambda - n + 1) \dots (\lambda - 1)}{(n - 1)!} \frac{\partial^{n-1} h}{\partial x^{n-1}} P_{0,1} = 0 \end{aligned}$$

et

$$(-)^n f_1 P_{o,n} + (-)^{n-1} \left[(\mu - n) \frac{\partial f_1}{\partial y} + \varphi_1 \right] P_{o,n-1} + \dots ,$$

équation analogue à la première et qu'on obtient en échangeant x et y , λ et μ ; les expressions f_1 , φ_1 et h_1 étant les analogues de f , φ et h ; par exemple

$$h_1 = (x - a_1)(y - a_2)(y - a_3) \dots (y - a_n) .$$

Remarquons que si, dans le système (I) on fait $n = 2$ $a_1 = 0$ et $a_2 = 1$, on retrouve le système d'équations aux dérivées partielles vérifié par la fonction F_1 d'APPELL quand on pose

$$b_1 = \beta + \beta' + 1 - \gamma, \quad b_2 = \gamma - \alpha, \quad \lambda = 1 - \beta, \quad \mu = 1 - \beta'.$$

2. Si l'on forme pour le système (I), la suite des déterminants Δ définis par Mr KAMPÉ de FÉRIET (Loc. cit. page 160), on obtient :

$$\Delta_1 = \Delta_2 = \dots = \Delta_{n-2} = 1; \quad \Delta_{n-1} = 0.$$

En effet :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1;$$

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\frac{h}{f} & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -\frac{h_1}{f_1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad (2 \leq i \leq n-2);$$

et

$$\Delta_{n-1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{h}{f} \\ -\frac{h}{f} & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -\frac{h_1}{f_1} \\ -\frac{h_1}{f_1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

car

$$1 - \frac{h}{f} \cdot \frac{h_1}{f_1} = 0$$

Nous avons donc, d'après la démonstration de Mr KAMPÉ de FÉRIET, au moins une relation entre les dérivées du Tableau

$$(S) \quad \begin{array}{cccc} p_{0,0} & p_{1,0} & \dots & p_{n-1,0} \\ p_{0,1} & p_{1,1} & \dots & p_{n-1,1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{0,n-1} & p_{1,n-1} & \dots & p_{n-1,n-1} \end{array}$$

3. Nous allons montrer qu'entre ces dérivées nous n'avons effectivement qu'une seule relation, c'est-à-dire que, outre les deux équations du système (I), la fonction H_n ne vérifiera qu'une équation supplémentaire.

Pour $n = 2$, on sait que la fonction F_1 d'APPELL vérifie l'équation supplémentaire :

$$(x - y) s - \beta' p + \beta q = 0$$

avec

$$\Delta_1 = 0.$$

Dérivons $n - 2$ fois la première équation (I) par rapport à y , puis $n - 2$ fois la seconde équation (I) par rapport à x , on obtient deux équations de la forme suivante :

$$(3) \quad \begin{array}{l} a H_{n,n-2} + b H_{n-1,n-1} + c H_{n-1,n-2} + d H_{n-2,n-1} + \dots = 0, \\ a' H_{n-2,n} + b' H_{n-1,n-1} + c' H_{n-2,n-1} + d' H_{n-1,n-2} + \dots = 0, \end{array}$$

où a, b, c, \dots désignent des fonctions de x et de y .

Dérivons encore une fois, il vient :

$$(4) \quad \begin{array}{l} a_1 H_{n,n-1} + b_1 H_{n-1,n} + c_1 H_{n-1,n-1} + \dots = 0, \\ a'_1 H_{n,n-1} + b'_1 H_{n-2,n} + c'_1 H_{n-1,n-1} + \dots = 0. \end{array}$$

Le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a'_1 & b'_1 \end{vmatrix}$$

est nul d'après les résultats trouvés précédemment; donc, on peut

du système (4) éliminer $H_{n,n-1}$ et $H_{n-1,n}$, ce qui nous donne une seule équation de la forme

$$(5) \quad \alpha H_{n-1,n-1} + \beta H_{n,n-2} + \gamma H_{n-2,n} + \dots = 0.$$

Il est facile de vérifier que le coefficient de $H_{n-1,n-1}$ n'est pas nul; le calcul donne en effet pour α l'expression suivante :

$$\begin{aligned} (-)^n \theta (x-a_1) \left[\frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi \left(\frac{b_2}{x-a_2} + \dots + \frac{b_n}{x-a_n} \right) \right] - \\ (-)^n \psi (y-a_1) \left[\frac{\partial \theta}{\partial y} - \theta \left(\frac{b_2}{y-a_2} + \dots + \frac{b_n}{y-a_n} \right) \right] \end{aligned}$$

en posant

$$\begin{aligned} \psi &= (x-a_2) \dots (x-a_n), \\ \theta &= (y-a_2) \dots (y-a_n). \end{aligned}$$

Du système d'équations (3) on peut tirer les valeurs de $H_{n,n-2}$ et $H_{n-2,n}$ qui, portées dans (5), donneront une relation dont la dérivée d'ordre le plus élevé sera $H_{n-1,n-1}$. Cette relation contenant la dérivée d'ordre le plus élevé du Tableau (S), on ne peut évidemment en tirer d'autres par dérivation, elle est donc unique.

Le système (I) a donc une intégrale générale qui s'exprime en fonction de $n^2 - 1$ intégrales linéairement indépendantes.

La vérification est immédiate pour la fonction F_1 d'APPELL qui vérifie un système d'ordre 2 et dont l'intégrale générale s'exprime en fonction de $2^2 - 1 = 3$ intégrales.

4. Nous avons défini H_n par une intégrale simple prise entre les limites g et h , g et h pouvant prendre les valeurs $a_1, a_2; \dots a_n, x, y$ et ∞ , ce qui nous donne $\frac{(n+2)(n+3)}{2}$ intégrales. Mais, l'intégrale générale du système (I) dépend de $n^2 - 1$ intégrales particulières; il nous faut donc

$$\frac{(n+3)(n+2)}{2} - (n^2 - 1) \geq 0$$

pour pouvoir exprimer l'intégrale de (I) en fonction des seules intégrales considérées, c'est-à-dire qu'il faut

$$n < 7.$$

Pour

n	n^2-1	$(n+3)(n+2)/2$
2	3	10
3	8	15
4	15	21
5	24	28
6	35	36

Donc, pour $n = 6$, les 36 intégrales définies doivent être reliées par une relation unique.

5. Partant de l'intégrale

$$(6) \int u^{b_1-1} (u - a_2)^{b_2-1} \dots (u - a_n)^{b_n-1} (u - x)^{\lambda-1} (u - y)^{\mu-1} du,$$

qui n'est autre que H_n où nous avons posé $a_1 = 0$, nous pouvons chercher à vérifier le système (I) dans lequel $a_1 = 0$ par une série de terme général

$$A_{p,q} x^p y^q.$$

Nous verrons sans peine que nous pouvons écrire

$$A_{p,q} x^p y^q = (1 - \lambda)_p (1 - \mu)_q \frac{x^p y^q}{p! q!} f(p + q).$$

En particulier la fonction F_1 d'APPELL s'obtient en posant

$$1 - \lambda = \beta, \quad 1 - \mu = \beta'$$

et en prenant

$$f(p + q) = \frac{(\alpha)_{p+q}}{(\gamma)_{p+q}}.$$

Nous allons obtenir, au moyen de la fonction F_b de LAURICELLA (*Rend. Palermo* t. VII) une expression pour $f(p + q)$.

Soit par exemple

$$H_n(x, y) = \int_{a_p}^{a_q} U(u - x)^{\lambda-1} (u - y)^{\mu-1} du$$

Le changement de variable

$$u = a_p + (a_q - a_p) W$$

nous donne

$$H_n(x, y) = K \int_0^1 W^{b_p-1} (1-W)^{b_q-1} \left[1 - \frac{a_q - a_p}{a_p - a_1} W \right]^{b_1-1} \dots dW,$$

le facteur K étant facile à déterminer.

On reconnaît là l'expression sous forme d'intégrale, de la fonction F_D de LAURICELLA dont les arguments sont fonction des a_i .

La formule de BARNES nous donne encore à partir de la fonction F_D , une représentation sous forme d'intégrale complexe, de la fonction H_n .

6. On verra aisément que si l'on représente par la notation

$$I_n \left(\begin{array}{cccccc} a_1 & a_2 & \dots & a_n & x & y \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n & \lambda & \mu \end{array} \right)$$

le système différentiel vérifié par la fonction H_n , le système différentiel adjoint peut s'écrire

$$I_n \left(\begin{array}{cccccc} a_1 & a_2 & \dots & a_n & x & y \\ -n+3-b_1 & 1-b_2 & \dots & 1-b_n & n-1-\lambda & n-1-\mu \end{array} \right).$$

Le système

$$I_n \left(\begin{array}{cccccc} a_1 & a_2 & \dots & a_n & x & y \\ \frac{3-n}{2} & \frac{1}{2} & \dots & \frac{1}{2} & \frac{n-1}{2} & \frac{n-1}{2} \end{array} \right)$$

est donc identique à son adjoint.

Si n est impair, λ et μ sont des entiers; $H_n(x, y)$ peut alors, à un coefficient près, se représenter par un polynome de degré $\frac{n-3}{2}$

en x et $\frac{n-3}{2}$ en y .

7. On peut obtenir le développement d'une fonction $H_n(x, y)$ en fonctions H_{n-1} . Appliquons cela à la fonction

$$H_3(x, y) = \int_{a_2}^{a_3} (u-a_1)^{b_1-1} (u-a_2)^{b_2-1} (u-a_3)^{b_3-1} (u-x)^{\lambda-1} (u-y)^{\mu-1} du;$$

le changement de variable

$$u = a_2 + (a_3 - a_2) w$$

nous donnera

$$\begin{aligned} H_3(x, y) = A \left\{ \int_0^1 w^{b_2-1} (1-w)^{b_3-1} \left(1 - \frac{a_2-a_3}{a_1-x}\right)^{\lambda-1} \left(1 - \frac{a_2-a_3}{a_1-y}\right)^{\mu-1} dw \right. \\ \left. - (b_1-1) \frac{a_2-a_3}{a_2-a_4} \int_0^1 w^{b_2} (1-w)^{b_3-1} \dots dw + \frac{(b_1-1)b_1}{2!} \left(\frac{a_2-a_3}{a_2-a_1}\right) \int_0^1 w^{b_2+1} \right. \\ \left. (1-w)^{b_3-1} \dots dw + \dots \right\} \end{aligned}$$

où A est un facteur qu'on déterminera.

$H^n(x, y)$ s'exprime donc en série de fonctions F_1 d'APPELL.

Enfin, on vérifiera les relations suivantes :

$$\frac{\partial^{p+q} H_n}{\partial x^p \partial y^q} = (-1)^{p+q} (-\lambda+1, p) (-\lambda+1, q) H_n \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n & x & y \\ b_1 & \dots & b_n & \lambda-p & \mu-q \end{pmatrix};$$

$$(x-y) \frac{\partial H}{\partial x} = (\lambda-1) [H - H_{\lambda-1, \mu+1}];$$

$$(y-x) \frac{\partial H}{\partial y} = (\mu-1) [H - H_{\lambda+1, \mu-1}];$$

$$(\mu-1)x^2 \frac{\partial H}{\partial x} - (\lambda-1)y^2 \frac{\partial H}{\partial y} = (\lambda-1)(\mu-1)[(x-y)H - H_{\lambda-1, \mu-1}];$$

etc.

relations qui rappellent celles vérifiées par la fonction F_1 .

Quelques propriétés des matrices H

PAR

Maurice PARODI

Une matrice carrée d'ordre n est dite du type H si ses éléments satisfont aux n inégalités ⁽¹⁾

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

En nous limitant au cas où les éléments sont réels, nous nous proposons de donner quelques nouvelles propriétés de ces matrices.

I. — *Limite inférieure du module des deux plus grandes valeurs caractéristiques des matrices H définies positives.*

Considérons la matrice d'ordre n , $H = (a_{ij})$ dont les éléments, supposés réels, satisfont aux inégalités

$$a_{ii} > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

On sait que dans ces conditions, la matrice H est définie positive; soient $|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|$ les modules de ses valeurs caractéristiques rangés par ordre de grandeur croissante; nous allons montrer que l'on a

$$(1) \quad \min [a_{ii} - |a_{jk}|] \leq |x_{n-1}| \leq |x_n|, \quad i \neq j, \quad i, j, k = 1, 2, \dots, n.$$

Posons $A = \max |a_{ij}|$, ($i \neq j$) et supposons que la relation (1) ne soit pas satisfaite. On pourrait avoir

$$(2) \quad |x_1| \leq |x_2| \leq \dots \leq |x_n| < \min a_{ii} - A;$$

nous allons montrer que la relation (2) conduit à une contradiction.

On a en effet

$$(3) \quad \sum_1^n |x_i| \geq \sum_1^n a_{ii},$$

⁽¹⁾ A. OSTROWSKI, *Bull. Sciences Math.*, **61**, 1937, p. 19; M. MÜLLER, *Math. Zeits.*, **51**, 1948, p. 291.

et, d'après (2), il viendrait

$$n[\min a_{ii} - A] > \sum_1^n a_{ii},$$

soit

$$n \min a_{ii} - \sum_1^n a_{ii} > n A.$$

Le membre de gauche de cette inégalité est négatif; comme nA est positif, il y a contradiction et l'on ne peut avoir la suite d'inégalités (2).

Supposons maintenant que l'on ait

$$(4) \quad |x_1| \leq |x_2| \leq \dots \leq |x_{n-1}| < \min a_{ii} - A \leq |x_n|$$

et montrons que ces inégalités conduisent également à une contradiction; de (3) et (4), on peut tirer

$$|x_n| \geq \sum_1^n a_{ii} - \sum_1^{n-1} |x_i| > \sum_1^n a_{ii} - (n-1) \min a_{ii} + (n-1) A,$$

et comme

$$\sum_1^n a_{ii} - (n-1) \min a_{ii} \geq \max a_{ii},$$

on aurait

$$(5) \quad |x_n| > \max a_{ii} + (n-1) A \geq \max [a_{ii} + \sum_{j \neq i} |a_{ij}|], \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Mais on sait qu'une limite supérieure des modules des valeurs caractéristiques de la matrice H est

$$\max [a_{ii} + \sum_{j \neq i} |a_{ij}|], \quad i, j = 1, 2, \dots, n;$$

il y a donc contradiction avec le résultat qu'implique l'inégalité (5); ainsi on a

$$\min [a_{ii} - |a_{jk}|] \leq |x_{n-1}| \leq |x_n|, \quad i \neq j, \quad i, j, k = 1, 2, \dots, n.$$

D'où le théorème : *une matrice H , à éléments réels, définie positive, a toujours deux valeurs caractéristiques supérieures en module à la différence entre le plus petit élément de sa diagonale principale et le module maximum de ses éléments non diagonaux.*

Nous trouvons ainsi une méthode générale de calcul d'une limite inférieure des modules des deux plus grandes valeurs caractéristiques d'une matrice H définie positive quand on se fixe le plus petit élément

de sa diagonale principale et le module maximum de ses éléments non diagonaux.

Ces résultats sont à rapprocher de ceux de M. Montel relatifs aux limites des modules des zéros des polynômes ⁽¹⁾ et qui comportent, en particulier, le corollaire suivant : le polynôme

$$(6) \quad a_0 \tilde{x}^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$$

dont les coefficients a_i sont tous différents de zéro a toujours un zéro de module supérieur à

$$\frac{1}{n} \left| \frac{a_1}{a_0} \right|.$$

En s'appuyant sur ce résultat, on peut d'ailleurs établir la première partie de notre proposition :

$$\min a_{ii} - A \leq |x_n|.$$

En effet, les conditions de M. Hadamard impliquent que les mineurs principaux de tous ordres de $\det(H)$, comme $\det(H)$ lui-même, sont différents de zéro; le polynôme caractéristique de la matrice H satisfait donc bien aux conditions imposées aux coefficients a_i du polynôme (6). Comme, dans le cas présent,

$$|a_0| = 1 \quad |a_1| = \sum_1^n a_{ii},$$

il résulte du théorème de M. Montel

$$\frac{1}{n} \sum_1^n a_{ii} \leq |x_n|,$$

c'est-à-dire

$$\min [a_{ii} - |a_{jk}|] \leq \min a_{ii} \leq \frac{1}{n} \sum_1^n a_{ii} \leq |x_n|$$

$$i \neq j; \quad i, j, k = 1, 2, \dots, n$$

II. — Conditions pour qu'une matrice H , définie positive, non symétrique, ait toutes ses valeurs caractéristiques réelles.

Un résultat de Brauer ⁽²⁾, que nous rappelons, permet de donner une solution de cette question : Étant donnée une matrice carrée,

⁽¹⁾ *Annales scientifiques de l'Ecole normale supérieure*, 40, 1923, p. 1.

⁽²⁾ *Duke math. Journ.*, 13, 1946, p. 387.

l'ordre n , $A = (a_{ij})$, si pour une valeur donnée de m ($1 \leq m \leq n$) et pour tout k différent de m ($1 \leq k \leq n$), on a

$$7) \quad |a_{mm} - a_{kk}| > \sum_{\mu \neq m} |a_{m\mu}| + \sum_{\nu \neq k} |a_{k\nu}| \quad k = 1, 2, \dots, n, k \neq m$$

$$\mu, \nu = 1, 2, \dots, n$$

le cercle

$$8) \quad |a_{mm} - z| = \sum_{\mu \neq m} |a_{m\mu}| \quad \mu = 1, 2, \dots, n$$

contient une valeur caractéristique et une seule de la matrice A ; de plus, les éléments de A sont *réels*; cette valeur caractéristique est *réelle*.

Géométriquement la condition (7) signifie que le cercle d'équation (8) ne coupe aucun des $(n - 1)$ cercles d'équations

$$|a_{kk} - z| = \sum_{\nu \neq k} |a_{k\nu}| \quad k, \nu = 1, 2, \dots, n; k \neq \nu$$

Considérons maintenant une matrice $H = (a_{ij})$, définie positive, l'ordre n ; on a

$$9) \quad a_{ii} > \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

et le résultat précédent permet de donner des conditions pour que les valeurs caractéristiques soient réelles : il suffit que les éléments a_{ij} soient tels que les relations (9) soient satisfaites et que les n cercles d'équations

$$|a_{ii} - z| = \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

ne se coupent pas.

A titre d'exemple, considérons la matrice non symétrique

$$\begin{pmatrix} 9 & 1 & -2 \\ -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Elle est bien du type H ; ses valeurs caractéristiques se trouvent à l'intérieur des cercles ayant pour centres les points $(9,0)$, $(4,0)$, $(1,0)$ et de rayons respectifs 3, 2 et 1. D'après le travail de Brauer, les cercles ne se coupent pas et les éléments de H étant réels, ces valeurs caractéristiques sont réelles.

Sur certains systèmes linéaires d'équations aux dérivées partielles du troisième ordre

(Suite et fin) ⁽¹⁾

PAR

M. R. H. J. GERMAÏ

§ 3. — D'après les formules (9) et (10), nous pouvons écrire les identités

$$(22_1) \quad \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} G_{j,s} (\xi, y, z; \xi, \eta, \zeta; \lambda) \\ = \lambda \sum_{\kappa=1}^{\kappa=p} \left[\begin{aligned} & B_{j,\kappa} (\xi, y, z) \cdot \frac{\partial}{\partial z} G_{\kappa,s} (\xi, y, z; \xi, \eta, \zeta; \lambda) \\ & + C_{j,\kappa} (\xi, y, z) \cdot \frac{\partial}{\partial y} G_{\kappa,s} (\xi, y, z; \xi, \eta, \zeta; \lambda) \\ & + D_{j,\kappa} (\xi, y, z) \cdot G_{\kappa,s} (\xi, y, z; \xi, \eta, \zeta; \lambda) \end{aligned} \right]$$

$$(22_2) \quad \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} G_{j,s} (x, \eta, z; \xi, \eta, \zeta; \lambda) \\ = \lambda \sum_{\kappa=1}^{\kappa=p} \left[\begin{aligned} & C_{j,\kappa} (x, \eta, z) \cdot \frac{\partial}{\partial x} G_{\kappa,s} (x, \eta, z; \xi, \eta, \zeta; \lambda) \\ & + A_{j,\kappa} (x, \eta, z) \cdot \frac{\partial}{\partial z} G_{\kappa,s} (x, \eta, z; \xi, \eta, \zeta; \lambda) \\ & + E_{j,\kappa} (x, \eta, z) \cdot G_{\kappa,s} (x, \eta, z; \xi, \eta, \zeta; \lambda) \end{aligned} \right]$$

(¹) Voir la première partie, dans ces *Annales*, t. 62 (1949), pp. 148-154.

$$(22_3) \quad \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} G_{j,s}(x, y, \zeta; \xi, \eta, \zeta; \lambda) \\ = \lambda \sum_{\kappa=1}^{\kappa=p} \left[\begin{aligned} & A_{j,\kappa}(x, y, \zeta) \cdot \frac{\partial}{\partial y} G_{\kappa,s}(x, y, \zeta; \xi, \eta, \zeta; \lambda) \\ & + B_{j,\kappa}(x, y, \zeta) \cdot \frac{\partial}{\partial x} G_{\kappa,s}(x, y, \zeta; \xi, \eta, \zeta; \lambda) \\ & + F_{j,\kappa}(x, y, \zeta) \cdot G_{\kappa,s}(x, y, \zeta; \xi, \eta, \zeta; \lambda) \end{aligned} \right] \\ (j, s = 1, 2, \dots p)$$

Faisons $\lambda=1$; remplaçons dans les équations (22₁) l'argument ξ par x ; puis, dans les équations (22₂), l'argument η par y et enfin, dans les équations (22₃), l'argument ζ par z ; ces substitutions sont légitimes en raison des opérations de dérivation qui figurent dans les équations considérées. Posons alors

$$(23_1) \quad P_{j,s}(x, y, z; x, \eta, \zeta; 1) = \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} G_{j,s}(x, y, z; x, \eta, \zeta; 1) \\ - \sum_{\kappa=1}^{\kappa=p} \left\{ \begin{aligned} & B_{j,\kappa}(x, y, z) \cdot \frac{\partial}{\partial z} G_{\kappa,s}(x, y, z; x, \eta, \zeta; 1) \\ & + C_{j,\kappa}(x, y, z) \cdot \frac{\partial}{\partial y} G_{\kappa,s}(x, y, z; x, \eta, \zeta; 1) \end{aligned} \right\}$$

$$(23_2) \quad Q_{j,s}(x, y, z; \xi, y, \zeta; 1) = \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} G_{j,s}(x, y, z; \xi, y, \zeta; 1) \\ - \sum_{\kappa=1}^{\kappa=p} \left\{ \begin{aligned} & C_{j,\kappa}(x, y, z) \cdot \frac{\partial}{\partial x} G_{\kappa,s}(x, y, z; \xi, y, \zeta; 1) \\ & + A_{j,\kappa}(x, y, z) \cdot \frac{\partial}{\partial z} G_{\kappa,s}(x, y, z; \xi, y, \zeta; 1) \end{aligned} \right\}$$

$$(23_3) \quad R_{j,s}(x, y, z; \xi, \eta, z; 1) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} G_{j,s}(x, y, z; \xi, \eta, z; 1) \\ - \sum_{\kappa=1}^{\kappa=p} \left\{ \begin{aligned} & A_{j,\kappa}(x, y, z) \cdot \frac{\partial}{\partial y} G_{\kappa,s}(x, y, z; \xi, \eta, z; 1) \\ & + B_{j,\kappa}(x, y, z) \cdot \frac{\partial}{\partial x} G_{\kappa,s}(x, y, z; \xi, \eta, z; 1) \end{aligned} \right\} \\ (j, s = 1, 2, \dots p)$$

Sciences Physiques et Chimiques

M. Ch. MANNEBACK fait une communication sur la fonction potentielle pour les mouvements gauches des molécules de benzène et d'éthylène.

La récession des nébuleuses extra-galactiques

(5^e PARTIE) (1)

PAR

P. DRUMAUX

Professeur à l'Université de Gand

Dans la 3^e partie de cette étude nous avons montré que la détermination astronomique des trajectoires des nébuleuses pourrait se faire par la mesure des effets Doppler et du rapport des distances de deux nébuleuses situées approximativement dans la même direction et cela pour six directions différentes, à condition toutefois qu'une haute précision puisse être atteinte dans les mesures.

Or l'incertitude dans les valeurs des magnitudes absolues constitue un obstacle à la mesure des distances.

La difficulté provient surtout de ce que la magnitude absolue varie d'une nébuleuse à l'autre, car cela complique beaucoup le problème.

Un premier pas serait franchi vers la détermination astronomique des trajectoires des nébuleuses si l'on parvenait à mesurer ces variations de la magnitude absolue, sans viser pour le moment à connaître les valeurs exactes des magnitudes elles-mêmes mais simplement leurs écarts d'une nébuleuse à l'autre.

Nous nous proposons de montrer comment ce premier objectif pourrait être atteint.

(1) Pour les précédentes parties de cette étude voir *Ann. de la Soc. Scientifique de Bruxelles* t. LXI (1947), Série I, 3^e fascicule, décembre 1947, p. 228; t. LXII (1948), Série I, 1^{er} fascicule, mars 1948, p. 27; t. LXII (1948, Série I, 2^e fascicule, mai 1948, p. 74; t. LXII, (1949), Série I, 1^{er} fascicule, mars 1949, p. 46.

Voir aussi *Commentationes*. — Pontificia Academia Scientiarum. Anno XI, Vol. XI, N. 12 (1947)p. 721-750. Le mouvement de récession des nébuleuses extra-galactiques.

Acta. — Pontif. Acad. Scient. Anno XII, Vol. XII (1948), p. 347-349. Sur la récession des nébuleuses extra-galactiques.

Partons pour cela de la relation entre la distance r en parsecs la magnitude apparente m et la magnitude absolue M :

$$\log r = 0,2 (m - M) + 1 \quad (1)$$

Elle donne pour le rapport r_1/r_2 des distances de deux nébuleuses N_1 et N_2 respectivement de magnitude apparente m_1 et m_2 et de magnitude absolue M_1 et M_2 :

$$\log \frac{r_1}{r_2} = 0,2 [(m_1 - m_2) - (M_1 - M_2)] \quad (2)$$

ce qui montre qu'il suffit de pouvoir mesurer la différence des magnitudes absolues, et que la connaissance des magnitudes absolues elles-mêmes n'est pas indispensable.

Montrons dès lors comment cette différence pourrait être mesurée.

Considérons à cette fin la loi de l'effet Doppler telle qu'elle résulte de la relativité :

Soient λ et λ' les longueurs d'onde d'une radiation lumineuse mesurée lorsque la source est respectivement en repos ou en mouvement relativement à l'observateur. On a :

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{1 + \frac{v \cos \varphi}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (3)$$

où φ est l'angle de la vitesse v avec la direction dans laquelle se trouve la nébuleuse, cet angle étant supposé mesuré dans le système d'axes de référence lié à l'observateur.

En développant le radical en série et en négligeant les termes à partir du 3^e ordre, on a pour l'effet Doppler D :

$$D \equiv \frac{\lambda' - \lambda}{\lambda} = \frac{v \cos \varphi}{c} + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \quad (4)$$

Rappelons d'autre part la loi que nous avons obtenue pour la vitesse des nébuleuses.

Considérons un système d'axes coordonnés trirectangulaires à leur origine O , située en permanence sur la Voie lactée, et représentés par des géodésiques spatiales et soient x_1 , x_2 , et x_3 les coordonnées

d'une nébuleuse. Les composantes de sa vitesse suivant les trois axes sont données par la loi linéaire suivante :

$$\begin{aligned} v_1 &= a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 \\ v_2 &= a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 \\ v_3 &= a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 \end{aligned} \quad (5)$$

que nous avons déduite de la loi de gravitation d'Einstein.

Cela étant, on déduit directement des équations (5) que pour des nébuleuses situées dans une même direction l'amplitude v de la vitesse est proportionnelle à la distance r , à savoir $v = Kr$ où K dépend de la direction envisagée. On déduit aussi de (5) que pour une même direction l'angle φ entre le vecteur vitesse et le rayon-vecteur r est constant et que cet angle varie avec la direction choisie.

En remplaçant v dans (4) il vient :

$$D = \frac{K \cos \varphi}{c} r + \frac{1}{2} \frac{K^2}{c^2} r^2 \quad (6)$$

En tirant r de (1) et en remplaçant dans (6), on aura :

$$D = \frac{K \cos \varphi}{c} 10^{0,2(m-M)+1} + \frac{1}{2} \frac{K^2}{c^2} 10^{0,4(m-M)+2} \quad (7)$$

Considérons dès lors une série de nébuleuses situées approximativement dans une même direction. Supposons qu'on ait pu mesurer leur effet Doppler D et leur magnitude apparente m . Si l'on considère un diagramme où m est porté en abscisse et D en ordonnée, chaque nébuleuse y sera figurée par un point P.

Comme la valeur de K et de $\cos \varphi$ est déterminée par le choix de la direction, les points figuratifs des nébuleuses ayant même magnitude absolue M_1 se trouveront sur la courbe de D en fonction de m pour $M = M_1$, tandis que les nébuleuses de magnitude absolue M_2 se trouveront sur la courbe correspondant à $M = M_2$.

Ces courbes tracées, disons depuis la 12^e jusqu'à la 22^e magnitude, sont du genre exponentiel. Leur gradient, très faible au début, s'accroît progressivement pour devenir fort escarpé au-delà de la 19^e magnitude.

Comme D dépend de $(m - M)$ les deux courbes auront même forme car elles pourront être amenées en coïncidence par glissement parallèlement à l'axe des m .

On voit que deux nébuleuses N_1 et N_2 ayant même effet Doppler D présenteront une différence de magnitude apparente $m_1 - m_2$ égale à la différence $M_1 - M_2$ de leurs magnitudes absolues. La mesure de la différence des magnitudes apparentes donnera donc directement l'écart entre les magnitudes absolues. On voit d'ailleurs sur l'équation (6) que deux nébuleuses situées dans la même direction et ayant même effet Doppler se trouvent à égale distance de la Voie lactée.

Nous allons montrer que le procédé reste applicable lorsque les nébuleuses N_1 et N_2 ont des effets Doppler différents.

Supposons pour un instant que K et $\cos \varphi$ soient connus et traçons par le point P_1 figuratif de N_1 la courbe (D, m) correspondant à M_1 et soit P_3 son intersection avec une droite menée par le point P_2 figuratif de N_2 parallèlement à l'axe des m . Le point P_3 figurera une nébuleuse N_3 de même magnitude absolue M_1 que N_1 et de même effet Doppler D_2 que N_2 . Dès lors la différence $m_3 - m_2$ sera égale à $M_1 - M_2$.

Montrons que cette méthode reste possible malgré que l'on ignore les valeurs exactes de K et de $\cos \varphi$.

Adoptons en effet pour K une valeur conventionnelle de référence K_0 égale au coefficient de la loi de Hubble pour les vitesses radiales et faisons en même temps $\cos \varphi = 1$.

A ces valeurs correspondra une courbe de référence dont la forme est indépendante de la magnitude M , comme nous venons de le montrer plus haut.

Si maintenant on fait varier K et $\cos \varphi$ la forme de la courbe ne se modifiera que relativement peu. Nous allons en effet montrer que si on ne fait varier que K en gardant $\cos \varphi = 1$, la forme ne change aucunement, et que si on fait varier à la fois φ et K le changement de forme est minime.

Que la courbe ne change pas lorsque $\cos \varphi = 1$, cela se voit sur

l'équation (7). En y faisant $\cos \varphi = 1$ et en posant $\mu = \frac{\log \frac{K}{c}}{0,2}$

l'équation peut s'écrire, en notant que :

$$\log \frac{1}{2} \frac{K^2}{c^2} = 2 \log \frac{K}{c} - \log 2 = 0,4\mu - \log 2$$

$$D = 10^{0,2(m-M+\mu)+1} + 10^{0,4(m-M+\mu)+2-\log 2} \quad (8)$$

où D ne dépend que de $m + \mu$ de sorte qu'une variation de μ ne produit de nouveau qu'un glissement de la courbe parallèlement à l'axe des m sans changement dans la forme.

D'autre part nous allons voir que si $\cos \varphi$ varie seul, le changement de forme de la courbe est minime de sorte que l'on peut employer une courbe conventionnelle correspondant à $K = K_0$ et $\cos \varphi = 1$ au lieu de la courbe correspondant aux vraies valeurs de K et de $\cos \varphi$, lesquelles sont inconnues pour la direction choisie. L'erreur que cette substitution entraîne sera relativement petite.

Par exemple si l'on fait varier $\cos \varphi$ de la valeur 1 à la valeur 0,8 et si l'on utilise la courbe conventionnelle pour passer de $D_1 = 0,5$ à $D_2 = 0,01$ l'erreur sur $M_1 - M_2$ due à l'usage de cette courbe est inférieure à un dixième de magnitude. Si l'on fait varier $\cos \varphi$ de 1 à 0,707 ($\varphi = 45^\circ$) l'erreur entre les mêmes limites pour D est d'un quart de magnitude.

Or la réduction de $D_1 = 0,5$ à $D_2 = 0,01$ correspond dans le cas d'une nébuleuse de magnitude absolue $M = -15$ au passage de la magnitude apparente 21,9 à la magnitude 13,8 et couvre donc 8 magnitudes, alors qu'en pratique on n'aura affaire qu'à des réductions beaucoup moindres; car dans le procédé décrit ci-dessus il suffira d'opérer sur des nébuleuses N_1 et N_2 dont les effets Doppler diffèrent relativement peu l'un de l'autre. Il en résulte que même pour une valeur conventionnelle de $\cos \varphi$ erronée de 30 % l'erreur commise sur l'écart $M_1 - M_2$ reste pratiquement inférieure à un dixième de magnitude.

Une courbe conventionnelle raisonnablement choisie peut donc servir pour la mesure des écarts de magnitude absolue malgré que l'on ignore les vraies valeurs de K et de $\cos \varphi$ pour la direction envisagée.

* * *

Calculons l'erreur $\Delta(M_1 - M_2)$ sur $M_1 - M_2$. Désignons par Δm_1 et Δm_2 les erreurs absolues sur m_1 et m_2 , par $\frac{\Delta D_1}{D_1}$ et $\frac{\Delta D_2}{D_2}$ les erreurs relatives sur D_1 et D_2 et par ε l'erreur due à ce que la courbe conventionnelle susdite ne correspond pas aux vraies valeurs de K et de φ .

Désignons par g le gradient de la courbe c'est-à-dire la dérivée de l'ordonnée D par rapport à l'abscisse m . On trouve aisément que :

$$\Delta(M_1 - M)_2 = \Delta m_1 + \Delta m_2 + \frac{\Delta D_1}{g_1} + \frac{\Delta D_2}{g_2} + \varepsilon$$

$$\text{ou bien : } \Delta(M_1 - M_2) = \Delta m_1 + \Delta m_2 + \frac{D_1}{g_1} \frac{\Delta D_1}{D_1} + \frac{D_2}{g_2} \frac{\Delta D_2}{D_2} + \varepsilon \quad (9)$$

Or D/g varie peu le long de la courbe et reste voisin de 2. En effet, dans l'expression (7) de D le 1^{er} terme est prépondérant vis-à-vis du 2^d, de sorte que D/g est à peu près constant. On aura donc en

$$\text{admettant } \frac{\Delta D_1}{D_1} = \frac{\Delta D_2}{D_2} :$$

$$\Delta(M_1 - M_2) = \Delta m_1 + \Delta m_2 + 4 \frac{\Delta D}{D} + \varepsilon \quad (10)$$

En ce qui concerne ε nous avons vu que même si l'erreur sur $\cos \varphi$ est de 30 % l'erreur ε est d'un quart de magnitude pour le passage de $D_1 = 0,5$ à $D_2 = 0,01$. Or en fait on pourra se limiter à des écarts dix fois moindres dans les effets Doppler et alors ε sera inférieur à 0,025.

Une erreur supérieure à 30 % pour $\cos \varphi$ paraît peu à craindre, car le coefficient de la loi de Hubble ne semble pas varier beaucoup avec la direction. On aurait donc :

$$\Delta(M_1 - M_2) = \Delta m_1 + \Delta m_2 + 4 \frac{\Delta D}{D} + 0,025 \quad (11)$$

et si l'on se borne à appliquer le procédé à deux nébuleuses de même effet Doppler, ε est nul et l'on a dans ce cas :

$$\Delta(M_1 - M_2) = \Delta m_1 + \Delta m_2 + 4 \frac{\Delta D}{D} \quad (12)$$

C'est le mieux que l'on puisse espérer, car quelle que soit la méthode utilisée on ne pourra pas se dispenser de faire au moins deux mesures de magnitude apparente et deux mesures de décalage de raies.

Comme nous l'avons dit plus haut la connaissance des écarts de magnitude absolue d'une nébuleuse à l'autre diminuerait la complication du problème de la mesure des distances.

* * *

Occupons-nous maintenant de la réduction à opérer sur les magnitudes apparentes par suite de la récession.

La grande vitesse des nébuleuses a pour conséquence de diminuer

l'intensité de la lumière reçue dans le télescope. Si I , est l'intensité d'une radiation monochromatique qui serait reçue si la nébuleuse était au repos par rapport à l'observateur et I' l'intensité lorsque la vitesse par rapport à celui-ci est v , la relativité donne :

$$\frac{I'}{I} = \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{\left(1 + \frac{v}{c} \cos \varphi\right)^2} \quad (13)$$

où φ a la même signification que dans l'équation (3).

Comme l'échelle astronomique des magnitudes suppose des sources au repos, une correction des magnitudes apparentes est nécessaire.

Le calcul rigoureux de cette correction nécessiterait toutefois la connaissance de la composition spectrale du rayonnement émis par les nébuleuses ainsi que la connaissance de l'absorption sélective due à l'atmosphère terrestre. Faute de renseignements précis à ce sujet, limitons-nous au cas de deux nébuleuses du même type spectral.

L'énergie reçue par le récepteur se rapporte à la partie du spectre à laquelle ce récepteur, par exemple la cellule photoélectrique, est sensible. Cette énergie a subi un premier affaiblissement exprimé par (13) suivi d'un second affaiblissement résultant de l'absorption sélective par l'atmosphère terrestre et de l'effet sélectif du télescope et du récepteur. Désignons par A le facteur de réduction dû au second affaiblissement. Si E' est l'énergie réellement reçue par le récepteur et E l'énergie qu'il aurait reçue s'il n'y avait pas eu de récession, on aura :

$$\frac{E'}{E} = \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{\left(1 + \frac{v}{c} \cos \varphi\right)^2} A \quad (14)$$

En traduisant E' et E en magnitudes m' et m on a :

$$m' - m = 2,5 \log \frac{\left(1 + \frac{v}{c} \cos \varphi\right)^2}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) A}$$

$$\text{Or d'après (3) on a : } D + 1 = \frac{1 + \frac{v}{c} \cos \varphi}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (15)$$

$$\text{d'où : } m' - m = 5 \log (D + 1) + 2,5 \log \frac{1}{A} \quad (16)$$

Cette formule est analogue à celle donnée par Hubble ⁽¹⁾ où le terme $2,5 \log 1/A$ est exprimé en magnitudes et désigné par K .

Comme nous considérons des nébuleuses ayant même genre de spectre la variation du facteur A d'une nébuleuse à l'autre sera moindre que dans le cas de spectres de types différents.

Si donc, en vue de déterminer les écarts de magnitude absolue, on compare entre elles deux nébuleuses N_1 et N_2 situées dans la même direction et ayant même effet Doppler ainsi que même type spectral, on aura en vertu de (16) et compte tenu de ce que $M_1 - M_2 = m_1 - m_2$:

$$M_1 - M_2 = m'_1 - m'_2 - 2,5 \log \frac{A_2}{A_1} \quad (17)$$

où A_2/A_1 sera voisin de 1, et $2,5 \log A_2/A_1$ relativement petit.

Comme l'affaiblissement de l'intensité lumineuse due à la récession a été interprétée en Astronomie en faisant appel à la théorie quantique de la lumière, signalons que la relation (13) peut être obtenue également par la mécanique ondulatoire. En partant des quatre équations de Dirac on aboutit exactement au même résultat que par la relativité.

(1) The realm of the nebulae, p. 195.

SESSION DU 27 AVRIL 1950

A BRUXELLES

Première Section

Sciences Mathématiques et Astronomiques

Points et droites remarquables du tétraèdre

PAR

Victor THÉBAULT

Tennie (France)

NOTATIONS. — Soient a, a', b, b', c, c' les mesures des arêtes BC, DA, CA, DB, AB, DC d'un tétraèdre $T \equiv ABCD$ et celles des dièdres suivant ces arêtes; A, B, C, D les mesures des aires des faces BCD, CDA, DAB, ABC et celles des angles des plans de celles-ci avec la sphère circonscrite (O), de centre O et de rayon R; G, G_i ($i = a, b, c, d$), les barycentres du tétraèdre et des faces précitées; O_i les centres des cercles BCD, CDA, DAB, ABC, de rayons R_i ; V le volume; H_i les mesures des hauteurs issues des sommets A, B, C, D, et enfin K le point dont la somme des carrés de ses distances aux plans des faces de T est la plus petite (*premier point de LEMOINE*).

A. — SECONDE DROITE D'EULER DU TÉTRAÈDRE T. Par analogie avec un triangle ABC inscrit à un cercle (O), de centre O, on peut appeler *première droite d'EULER* d'un tétraèdre T la droite OG et *seconde droite d'EULER* celle qui joint le point O à son conjugué isogonal Ω par rapport à T.

1. THÉORÈME. — Dans un tétraèdre T, le tétraèdre tangentiel $T_1 \equiv A_1B_1C_1D_1$ et le tétraèdre podaire $T' \equiv A'B'C'D'$ du point Ω se correspondent dans une homothétie dont le centre P est situé sur la seconde droite d'EULER O Ω .

Car les plans des faces $B'C'D', C'D'A', D'A'B', A'B'C'$ du tétraèdre T' étant perpendiculaires aux rayons OA, OB, OC, OD de la sphère (O), les tétraèdres T_1, T' sont homothétiques et le point Ω coïncide

avec le centre d'une sphère tangente aux quatre plans des faces de T' , tandis que le point O se confond avec celui d'une sphère tangente aux quatre plans des faces de T_1 . Ce centre d'homothétie P des tétraèdres T' et T_1 est donc situé sur la droite $O\Omega$.

Expression du rapport d'homothétie des tétraèdres T' et T_1 .

Le carré du demi-petit axe de la quadrique de révolution de foyer O, inscrite au tétraèdre T, ayant pour expression

$$\beta^2 = \frac{3VR}{\Sigma A \sec A},$$

$$\Omega A' = \frac{\beta^2}{OO_a} = \frac{\beta^2}{R \cos A} = \frac{3V}{\cos A \Sigma A \sec A}. \quad (1)$$

Donc, le rapport d'homothétie des tétraèdres T' et T_1 ,

$$k = \frac{\overline{\Omega A'}}{\overline{OA_1}} = \frac{\overline{\Omega A'}}{R \sec A} = \frac{3V}{R \cdot \Sigma A \sec A}. \quad (2)$$

2. THÉORÈME. — *Les distances du centre d'homothétie des tétraèdres T' et T_1 aux plans des faces du tétraèdre T sont proportionnelles aux quantités*

$$\frac{\sin^2 A}{\cos A}, \frac{\sin^2 B}{\cos B}, \frac{\sin^2 C}{\cos C}, \frac{\sin^2 D}{\cos D}.$$

D'après (1), les coordonnées normales du point Ω étant proportionnelles à $\sec A, \sec B, \sec C, \sec D$ tandis que celles du point O sont proportionnelles à $\cos A, \cos B, \cos C, \cos D$, les coordonnées du point P sont proportionnelles à

$$\sec A - \cos A, \sec B - \cos B, \sec C - \cos C, \sec D - \cos D,$$

ce qui achève de démontrer le théorème.

Les distances du point P aux plans des faces de T sont

$$PP_a = \frac{3VR}{R \Sigma A \sec A - 3V} \cdot \frac{\sin^2 A}{\cos A}, \dots$$

COROLLAIRE. — *Le point P se confond avec le centre d'homothétie du tétraèdre T et du tétraèdre déterminé par les plans parallèles aux faces BCD, CDA, DAB, ABC menés par les points A_1, B_1, C_1, D_1 .*

3. THÉORÈME. — *Le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre tangentiel T_1 est situé sur la seconde droite d'EULER du tétraèdre T.*

Car le centre O_1 de la sphère $A_1B_1C_1D_1$ est le transformé du centre O' de la sphère $A'B'C'D'$, situé au milieu de $O\Omega$, dans l'homothétie (P, k) . Le point O_1 partage le segment ΩO dans le rapport

$$\overline{O\Omega} : \overline{OO_1} = 2k + 1.$$

COROLLAIRE. — *Si (I) et t désignent une sphère tangente aux quatre plans des faces du tétraèdre T et le tétraèdre podaire du point I par rapport à celui-ci, le tétraèdre podaire t' du point I par rapport à t est homothétique au tétraèdre T et le centre d'homothétie est sur la droite OI ainsi que le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre t' .*

4. Remarques. — 1° Le rayon de la sphère, de centre Ω , tangente aux quatre plans des faces du tétraèdre T', a pour expression

$$r = k \cdot R = \frac{3V}{\Sigma A \sec A},$$

en vertu de (2).

2° Pour que la droite $O\Omega$ soit parallèle au plan d'une face, ABC par exemple, il faut et il suffit que

$$OO_a = R \cos A = \Omega A'; \text{ d'où } 3V = R \cos^2 A \cdot \Sigma A \sec A.$$

3° On connaît peu de relations entre les angles A, B, C, D, $\left(0 < A, B, C, D < \frac{\pi}{2}\right)$, que les plans des faces d'un tétraèdre T font avec la sphère circonscrite et que nous avons introduits ici. Voici deux formules faciles à établir :

$$\Sigma \sin A = \frac{1}{4R} \left(\frac{ab'c'}{A} + \frac{bc'a'}{B} + \frac{ca'b'}{C} + \frac{abc}{D} \right),$$

$$\Sigma A \sin A = \frac{3V}{R} \cot \theta,$$

en désignant par θ l'angle de BROCARD du tétraèdre T tel que nous l'avons défini. ⁽¹⁾

⁽¹⁾ Annales, t. LXI — 1922 — 176.

B. — A PROPOS DE LA DROITE GK. Parmi les positions particulières de la droite qui joint le centre de gravité au *premier* point de LEMOINE d'un tétraèdre $T \equiv ABCD$, figurent celles où GK est parallèle ou perpendiculaire au plan d'une face.

PREMIER CAS. — Les distances du point K aux plans BCD, CDA, DAB, ABC étant, $(A^2 + B^2 + C^2 + D^2 = S)$,

$$KK_a = \frac{3AV}{S}, \quad KK_b = \frac{3BV}{S}, \quad KK_c = \frac{3CV}{S}, \quad KK_d = \frac{3DV}{S},$$

on obtient la relation

$$3D^2 = A^2 + B^2 + C^2$$

quand GK est parallèle au plan ABC.

SECOND CAS. — 1. THÉORÈME PRÉLIMINAIRE. *Si une médiane AG_a , passe par le centre O de la sphère circonscrite à un tétraèdre $T \equiv ABCD$, les sinus des trièdres $(O - ABC)$, $(O - ACD)$, $(O - ADB)$ sont égaux entre eux et de même signe.*

En effet, la médiane AG_a étant le lieu des points dont les distances aux plans des faces ABC, ACD, ADB sont inversement proportionnelles aux aires de ces faces, si elle passe par le centre O de la sphère circonscrite au tétraèdre T, les volumes des tétraèdres OABC, OACD, OADB sont équivalents et de même signe et les sinus des trièdres en cause sont égaux.

Cas particuliers. — 1° Si les trièdres $(O - ABC)$, $(O - ACD)$, $(O - ADB)$, qui possèdent une face commune, sont superposables,

$$BC = CD = DB \quad \text{et} \quad AB = AC = AD.$$

2° Lorsque les faces BOC et DOA, COD et AOB, DOB et COA sont superposables,

$$BC = DA, \quad CA = DB, \quad AB = DC;$$

le tétraèdre T est équifacial.

3° Quand les angles BOC et AOD, COD et AOB, DOB et AOC sont des couples d'angles supplémentaires,

$$4R^2 = \overline{BC}^2 + \overline{DA}^2 = \overline{CA}^2 + \overline{DB}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{DC}^2.$$

Le triangle orthocentrique T dont la droite d'EULER $OG = AG_a$ passe par le sommet A est *trirectangle* en ce point.

Cas général. — Etant donné un triangle quelconque BCD , si on joint son barycentre G_a à un point arbitraire O de l'axe du cercle BCD , la sphère (O) , de centre O , qui passe par ce cercle rencontre la droite G_aO aux sommets A et A_1 des tétraèdres $ABCD$, A_1BCD dont les médianes AG_a et A_1G_a passent au centre O de la sphère circonscrite.

Le lieu des points A et A_1 est une cubique circulaire passant par G_a , anallagmatique par rapport à un cercle de centre G_a . Lorsque O coïncide avec le centre du cercle BCD , les tétraèdres $ABCD$, A_1BCD dégénèrent en un quadrangle plan.

Si on transforme le tétraèdre $ABCD$ par polaires réciproques par rapport à une sphère centrée en son centre de gravité G , on obtient un tétraèdre $T_2 = A_2B_2C_2D_2$ ayant pour centre de gravité G et circonscrit à une quadrique de révolution, polaire réciproque de la sphère (O) , ayant pour foyers G et le *premier* point de LEMOINE K_2 de T_2 .

COROLLAIRES. — 1. La droite GK_2 est normale au plan d'une face du tétraèdre T_2 .

2. Un tétraèdre dont trois médianes se coupent deux à deux à angle droit est le polaire réciproque d'un tétraèdre *trirectangle* par rapport à une sphère centrée en son centre de gravité.

N. B. — Cette remarque permet d'ajouter les propriétés suivantes à celles déjà connues d'un tétraèdre $T = ABCD$ dont trois médianes sont deux à deux rectangulaires. (1).

1° La droite GK est normale au plan d'une face.

2° La quadrique de révolution inscrite, de foyers G et K , est tangente au plan d'une face du tétraèdre complémentaire $G_aG_bG_cG_d$.

3° Le premier point de LEMOINE K partage une des symédianes dans le rapport — 11.

Si les médianes AG_a , BG_b , CG_c de T sont deux à deux rectangu-

(1) J. NEUBERG, *Mathesis*, 1922-34; R. GOORMAGHTIGH, *Mathesis*, 1933-440; V. THÉBAULT, *Mathesis*, 1933 — 440; LVI — 76.

lares, ces propriétés proviennent de ce que

$$KA' = \frac{3DV}{A^2 + B^2 + C^2 + D^2} = \frac{3DV^{(1)}}{12D^2} = \frac{H_d}{12},$$

$$GK = \frac{H_d}{6} = \alpha, \beta = \frac{H_d \sqrt{3}}{12},$$

A' étant la projection orthogonale de K sur ABC, α, β les demi-axes de la quadrique.

C. — SUR LES CONTACTS DES SPHÈRES TANGENTES AUX QUATRE PLANS DES FACES. Si on désigne par I', (I'_1, I'_2, I'_3), I'_i, les contacts du plan de la face ABC d'un tétraèdre général T \equiv ABCD avec la sphère inscrite, les sphères des combles, les sphères inscrites aux trièdres tronqués, de centres I, (I_1, I_2, I_3), I_i et de rayons r, (r_1, r_2, r_3), r_i, les points I' et I'_a, I'_1 et I'_b, I'_2 et I'_c, I'_3 et I'_a sont les foyers de quatre coniques inscrites au triangle ABC dont le petit axe ou l'axe non transverse est ⁽²⁾

$$2\sqrt{rr_a}, \quad 2\sqrt{r_1r_b}, \quad 2\sqrt{r_2r_c}, \quad 2\sqrt{r_3r_a}.$$

1. Soient (x, y, z), (λ, μ, ν) les distances du point I' aux côtés BC, CA, AB et aux sommets A, B, C du triangle ABC. Des calculs simples donnent

$$x = r \cot \frac{a}{2}, \quad y = r \cot \frac{b}{2}, \quad z = r \cot \frac{c}{2},$$

$$\lambda = \frac{8 B.C.D}{9 V^2} \cdot r \cos \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2} \cos \frac{a'}{2}, \quad \mu = \frac{8 C.D.A}{9 V^2} \cdot r \cos \frac{c}{2} \cos \frac{a}{2} \cos \frac{b'}{2},$$

$$\nu = \frac{8 D.A.B}{9 V^2} \cdot r \cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} \cos \frac{c'}{2}.$$

Le grand axe de la conique de foyers I' et I'_a, inscrite au triangle ABC a pour mesure

(1) V. THÉBAULT, loc. cit.

(2) NEUBERG, *Mémoire sur le tétraèdre*, 1884, p. 23. — V. THÉBAULT, *Annales*, 1921 — 236 et *Mathesis*, 1922 — 16.

$$2\alpha = \frac{16 \text{ A.B.C.D. } r}{27 V^3} \cdot r_a \cos \frac{a'}{2} \cos \frac{b'}{2} \cos \frac{c'}{2}$$

$$= \frac{8 \text{ A.B.C.}}{9 V^2} \cdot (r_d - r) \cdot \cos \frac{a'}{2} \cos \frac{b'}{2} \cos \frac{c'}{2}, \quad (1)$$

car (2)

$$\frac{1}{r_d} - \frac{1}{r} = \frac{2 D}{V}.$$

Si (x', y', z') et π, π' mesurent les distances du point I'_a aux côtés BC, CA, AB du triangle ABC et les puissances des points I', I'_a par rapport au cercle ABC, on a

$$\frac{\pi}{\pi'} = \frac{xyz}{x'y'z'} = \left(\frac{r}{r_d}\right)^3$$

et

$$\pi = -\frac{abc r^2}{2Dr_d} \cdot \cot \frac{a}{2} \cot \frac{b}{2} \cot \frac{c}{2}, \quad \pi' = -\frac{abc r_d^2}{2Dr} \cdot \tan \frac{a}{2} \tan \frac{b}{2} \tan \frac{c}{2}.$$

2. THÉORÈME. — D'un point arbitraire P, pris sur la bissectrice du trièdre de sommet A et d'arêtes AB, AC, AD ou leurs prolongements, on abaisse les perpendiculaires PA', PB', PC', PD' sur les plans des faces BCD, CDA, DAB, ABC, du tétraèdre T. La droite PA' rencontre le plan B'C'D' sur la droite qui joint le sommet A au centre de la conique inscrite à la face BCD, ayant pour foyer le point de contact de celle-ci avec une sphère inscrite aux trièdres tronqués.

Lorsque le point P se déplace sur la bissectrice, le point de rencontre A'' de PA' avec le plan B'C'D' décrit une droite passant par A. Si P coïncide avec le milieu du segment II_a , situé sur la surface cubique de SARTIAUX (3) de T, les projections orthogonales de P sur les plans des faces sont coplanaires. L'une de ces projections se confond avec le milieu de $I'I'_a$, centre de la conique en cause.

La conclusion est la même lorsque P décrit les bissectrices des trois trièdres de sommet A dont une arête est le prolongement de AB, AC, AD.

(1) Nous avons donné une représentation géométrique de cette expression (*Mathesis*, 1922 — 16).

(2) V. THÉBAULT, *Mathesis*, 1929 — 81.

(3) Cfr. *Mathesis*, t. LVIII — 83.

N. B. — Ce théorème étend au tétraèdre une proposition de CESARO relative à un triangle. ⁽¹⁾

D. — NOTE SUR UNE COMMUNICATION PRÉCÉDENTE ⁽²⁾. Nous avons établi que la droite qui joint le sommet D d'un tétraèdre $T \equiv ABCD$ au barycentre d'une section antiparallèle du trièdre $(D - ABC)$ rencontre le plan de la face opposée ABC en un point D_2 dont les coordonnées barycentriques par rapport au triangle ABC sont inversement proportionnelles aux carrés a'^2, b'^2, c'^2 des arêtes opposées DA, DB, DC, ce qui revient à dire que le point D_2 coïncide avec le point de concours des droites qui joignent les sommets A, B, C aux isotomiques des pieds des symédianes issues du sommet D dans les triangles DBC, DCA, DAB.

Cette remarque a conduit M. R. BLANCHARD à la construction suivante du point D_1 considéré au paragraphe 5 de la communication précitée.

Soient $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ les coordonnées barycentriques du point D_1 dans le tétraèdre T. Pour que les points u, u', v, v', w, w' soient cosphériques, il faut et il suffit que

$$a'^2 \alpha \delta = b'^2 \beta \delta = c'^2 \gamma \delta.$$

Soient, en outre, r et r' les points d'intersection des faces DAB et DCA avec la parallèle à BC menée par le point D_1 , s et s', t et t' les points analogues à r et r' correspondant au point D_1 et aux arêtes CA et AB. Les points r, r', s, s', t, t' sont dans un plan parallèle à la face ABC et, pour qu'ils soient concycliques, il faut et il suffit que

$$a^2 \beta \gamma = b^2 \gamma \alpha = c^2 \alpha \beta;$$

donc que α, β, γ soient proportionnels à a^2, b^2, c^2 , c'est-à-dire que le point D_1 appartienne à la droite qui joint le point D au point de LEMOINE du triangle ABC.

Donc, en modifiant légèrement l'hypothèse faite au paragraphe 5, pour que les points $u, u', v, v', w, w', s, s'$, soient cosphériques, il faut et il suffit que le point D_1 coïncide avec l'intersection de la droite qui joint le point B au point de LEMOINE du triangle CDA et de la droite qui joint le point D au point de concours des droites qui unissent les

⁽¹⁾ *Mathesis*, 1881 — 117, Question 40.

⁽²⁾ *Annales*, 1949 — 130.

sommets A, B, C aux isotomiques des pieds des symédianes issues de D dans les triangles DBC, DCA, DAB.

Le point D_1 ainsi obtenu se confond avec le barycentre des sommets A, B, C, D de T affectés des coefficients

$$\frac{1}{a'^2 b^2}, \frac{1}{b'^2 b^2}, \frac{1}{b^2 c'^2}, \frac{1}{a'^2 c'^2}, \quad (1)$$

et les droites AA_3 , BB_2 , CC_3 , DD_2 forment un quadruple hyperboloïde puisque des droites issues des autres sommets les rencontrent.

Ces remarques s'appliquent aussi au paragraphe 6 (*Tétraèdre spécial*). Pour que les points $u, u', v, v', w, w', s, s', t, t'$ soient cosphériques, il faut et il suffit que les droites qui joignent les points B et C aux points de LEMOINE des faces opposées soient concourantes. Or, le point de concours de DD_2 et de la droite qui joint le point C au point de LEMOINE du triangle DAB est le barycentre des points A, B, C, D affectés des coefficients

$$\frac{1}{a'^2 c^2}, \frac{1}{b'^2 c^2}, \frac{1}{c^2 c'^2}, \frac{1}{a'^2 b'^2}. \quad (2)$$

On déduit de (1) et (2) qu'il faut et il suffit que

$$b^2 b'^2 = c^2 c'^2, \text{ soit } bb' = cc'.$$

Enfin, pour que les points $u, u', v, v', w, w', s, s', t, t', r, r'$ soient cosphériques, il faut et il suffit que $aa' = bb' = cc'$. (*Tétraèdre isodynamique*).

Sur les triangles autopolaires des polarités planes

PAR

Robert BALLIEU

0. Nous considérons un plan projectif sur un champ ⁽¹⁾ quelconque et examinons pour les polarités de ce plan les possibilités existant quant au nombre des côtés d'un triangle autopolaire renfermant des points conjugués à eux-mêmes dans la polarité. Nous indiquons les propriétés algébriques du champ de base caractérisant chacune de ces possibilités.

Les champs dans lesquels l'ensemble des carrés non nuls forme un sous-groupe d'indice deux du groupe multiplicatif des éléments non nuls présentent un intérêt tout spécial; ceux de ces champs où toute somme de carrés est un carré et où (-1) n'est pas un carré, c.-à-d. les champs ordonnés où tout élément positif est carré, sont caractéristiques de la situation rencontrée pour le champ des nombres réels : Il y a des polarités uniformes (sans points conjugués à eux-mêmes) et chaque triangle autopolaire par rapport à une polarité non uniforme a exactement deux côtés sécants.

1. Toute polarité a des triangles autopolaires. Cela étant, prenant un triangle autopolaire de la polarité comme triangle de référence, l'équation du lieu des points conjugués à eux-mêmes de la polarité, (c.-à-d. la conique attachée à la polarité, conique qui peut être dépourvue de points et qui sinon, si la caractéristique du champ est deux, est réduite à un point ou à une droite), s'écrit :

$$b_1x_1^2 + b_2x_2^2 + b_3x_3^2 = 0, \quad (b_i \neq 0, i = 1, 2, 3);$$

cette équation peut se normaliser en

$$(1) \quad x_3^2 = a_1x_1^2 + a_2x_2^2, \quad (a_i \neq 0, i = 1, 2).$$

⁽¹⁾ « Champ » est employé ici pour « corps commutatif »; « polarité » l'est pour « réciprocity involutive non dégénérée ».

Nous obtiendrons des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence de polarités uniformes, de polarités non uniformes admettant des triangles autopolaires ayant exactement zéro, un, deux ou trois côtés sécants en exprimant que a_1 et a_2 peuvent être choisis dans (1) de façon que respectivement : (1) n'ait dans le champ \mathbf{K} que la solution triviale $(0,0,0)$; (1) ait dans \mathbf{K} des solutions non triviales et que dans ces solutions, chaque x_i soit différent de zéro; (1) ait dans \mathbf{K} une solution $(x_1, x_2, 0)$ non triviale et n'ait d'autres solutions $(x_1, 0, x_3)$ et $(0, x_2, x_3)$ que la solution triviale; (1) ait dans \mathbf{K} des solutions $(0, x_2, x_3)$ et $(x_1, 0, x_3)$ non triviales et n'ait d'autres solutions $(x_1, x_2, 0)$ que la solution triviale; (1) ait dans \mathbf{K} des solutions $(0, x_2, x_3)$, $(x_1, 0, x_3)$ et $(x_1, x_2, 0)$ non triviales. Nous obtenons ainsi :

Pour qu'il existe dans le plan projectif sur le champ \mathbf{K} des polarités uniformes, il faut et suffit que : I_1) *Il existe dans \mathbf{K} un élément a , non carré, et un élément b tels que $(at^2 + b)$ ne soit carré pour aucune valeur de t .* Cette condition implique que b n'est pas carré.

Pour qu'il existe dans le plan projectif sur le champ \mathbf{K} des polarités non uniformes avec triangles autopolaires sans côtés sécants, il faut et suffit que : II_1) *Il existe dans \mathbf{K} des éléments non carrés a et b dont l'opposé du rapport soit non carré et tels que $(at^2 + b)$ soit carré pour au moins une valeur de t .*

Pour qu'il existe dans le plan projectif sur le champ \mathbf{K} des polarités avec triangles autopolaires ayant exactement un côté sécant, il faut et suffit que : III_1) *\mathbf{K} renferme des non carrés dont l'opposé du rapport soit carré.*

Pour qu'il existe dans le plan projectif sur le champ \mathbf{K} des polarités avec triangles autopolaires ayant exactement deux côtés sécants il faut et suffit que : IV_1) *(-1) n'est pas carré.*

Pour qu'il existe dans le plan projectif sur le champ \mathbf{K} des polarités avec triangles autopolaires ayant leur trois côtés sécants, il faut et suffit que : IV_2) *(-1) est carré.*

En appliquant ces conditions, il ne faut pas oublier que, si la caractéristique de \mathbf{K} est différente de deux, toutes les polarités non uniformes sont dans la même situation quant à leurs triangles autopolaires; en effet, deux quelconques de ces polarités sont transformables l'une dans l'autre par une homographie du plan.

2. Il reste à examiner les possibilités pour un champ \mathbf{K} de satisfaire simultanément à un certain nombre des conditions $I_1, II_1, III_1,$

IV_1 et de leurs négations I_2, II_2, III_2, IV_2 . Cette étude met en évidence les deux propriétés suivantes : V_1) *Tout élément de K est carré*; VI_1) *Le groupe multiplicatif K^* des carrés non nuls de K est d'indice deux dans le groupe multiplicatif K^* des éléments non nuls de K* ; les négations de ces propriétés seront désignées par V_2 et VI_2 . Nous verrons aussi qu'au plus dix des combinaisons I_i, II_j, III_k, IV_l , ($i, j, k, l = 1, 2$), sont possibles, à savoir les dix combinaisons :

- 1 : I_2, II_2, III_2, IV_2 ; 2 : I_1, II_1, III_1, IV_2 ; 3 : I_2, II_2, III_1, IV_2 ;
 4 : I_1, II_2, III_2, IV_1 ; 5 : I_2, II_1, III_2, IV_1 ; 6 : I_1, II_1, III_1, IV_1 ;
 7 : I_1, II_2, III_1, IV_2 ; 8 : I_2, II_1, III_1, IV_2 ; 9 : I_1, II_2, III_1, IV_1 ;
 10 : I_2, II_1, III_1, IV_1 .

Ces combinaisons donnent lieu au tableau suivant où un signe + dans la colonne marquée U indique que pour la combinaison correspondante, il y a des polarités uniformes et un signe + dans une colonne intitulée i , ($i = 0, 1, 2, 3$), indique qu'il y a des polarités non uniformes avec triangles autopolaires ayant exactement i côtés sécants; les signes — ont les significations opposées.

Combinaison	U	0	1	2	3
1	—	—	—	—	+
2	+	+	+	—	+
3	—	—	+	—	+
4	+	—	—	+	—
5	—	+	—	+	—
6	+	+	+	+	—
7	+	—	+	—	+
8	—	+	+	—	+
9	+	—	+	+	—
10	—	+	+	+	—

La justification des affirmations précédentes résultera des considérations suivantes. Si IV_1 a lieu, une au moins des conditions I_1 et II_1 est vérifiée; en effet, si $(-t^2 - 1)$ est parfois carré, II_1 est vérifié pour $a = b = -1$, et si $(-t^2 - 1)$ n'est jamais carré, I_1 est vérifié pour les mêmes valeurs. D'un autre côté, le paragraphe 3 montrera que IV_2 entraîne soit (III_2, II_2, I_2) , soit III_1 . Enfin, nous verrons au paragraphe 4 que $(IV_1, III_2$ et $I_1)$ entraînent II_2 .

3. Il est immédiat que la propriété V_1 entraîne I_2 , II_2 , III_2 , IV_2 . Inversement, III_2 et V_2 entraînent IV_1 ; car si a est un non carré de K , $-1 = -(a/a)$ est, en vertu de III_2 , un non carré; donc, III_2 et IV_2 entraînent V_1 , I_2 et II_2 .

Nous avons ainsi : *La condition nécessaire et suffisante pour que dans le plan projectif sur le champ K , chaque côté de tout triangle autopolaire de toute polarité rencontre la conique attachée à la polarité est que tout élément de K soit carré; nous avons même : La condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe dans le plan projectif sur le champ K des polarités avec triangles autopolaires ayant leurs trois côtés sécants et sans triangles autopolaires ayant exactement un côté sécant est que tout élément de K soit carré.*

4. Soit un champ K satisfaisant à la condition VI_1 , ce qui revient à : l'ensemble N des non carrés n'est pas vide et le rapport de deux non carrés est un carré; en particulier, V_2 a lieu.

Si alors IV_2 a lieu, nous avons, comme déjà remarqué, III_1 ; de plus, (-1) et le rapport de deux non carrés quelconques étant carrés, l'opposé du rapport de deux non carrés est toujours carré et II_2 a lieu.

Si, par contre, IV_1 a lieu, (-1) n'est pas carré et l'opposé du rapport de deux non carrés est le produit d'un carré et d'un non carré, donc est non carré; III_2 a lieu.

Enfin, si I_1 a lieu, K renferme des éléments a et b non carrés tels que $(at^2 + b)$ ne soit jamais carré; comme dans le cas présent, a/b est alors carré, nous avons que $(t^2 + 1)$ est toujours carré non nul et, par conséquent, pour tous a et b non carrés, $(at^2 + b)$ n'est jamais carré; donc II_2 a lieu; de plus, (-1) n'est pas carré et nous avons IV_1 .

En résumé, si VI_1 a lieu, nous nous trouvons dans un des cas 3, 4 ou 5, car si IV_1 est valable, I_2 et II_2 ne sont pas tous deux vérifiés.

Inversement, dans chacun de ces cas, VI_1 a lieu. En effet, dans le cas 3, nous avons qu'il y a des non carrés et que l'opposé du rapport de deux non carrés quelconques est carré; mais, puisque (-1) est carré, le rapport lui-même est carré; VI_1 est vérifié. Pour les quatrième et cinquième cas, remarquons qu'ils ont en commun les conditions IV_1 et III_2 . Ces deux conditions entraînent qu'il y a des non carrés, (-1) en particulier, et que l'opposé du rapport de deux non carrés est non carré; pour tout a non nul, nous avons $-a/(-a)=1$; ainsi, pour un tel a , a et $(-a)$ ne sont jamais tous deux non carrés;

d'autre part, (-1) n'étant pas carré, a et $(-a)$ ne sont pas tous deux carrés; donc l'un est carré, l'autre ne l'est pas; si alors, a et b sont non carrés, $-a/b$ ne l'est pas et a/b l'est; finalement, nous avons que IV_1 et III_2 entraînent à eux seuls VI_1 . Ce résultat établit notre affirmation au sujet des quatrième et cinquième cas; de plus, joint à l'analyse précédente, il montre que ces deux cas sont les seuls où les conditions III_2 et IV_1 aient lieu simultanément.

Les champs K pour lesquels le quatrième cas se produit sont donc ceux satisfaisant aux conditions : VI_1 et $(t^2 + 1)$ toujours carré non nul; $(t^2 + u^2)$ est alors aussi carré non nul pour tout $(u, v) \neq (0, 0)$; l'ensemble des carrés non nuls est stable pour l'addition et la multiplication; de plus, (-1) n'étant pas carré, si x est carré, $(-x)$ ne l'est pas; ces champs sont donc des champs ordonnés où tout élément positif est carré. Inversement, si K est un tel champ, les non carrés s'identifient aux éléments strictement négatifs et le rapport de deux non carrés est un carré; VI_1 a lieu et puisque $(1+t^2)$ est toujours carré, la condition I_1 est aussi vérifiée; on se trouve dans le quatrième cas. Nous pouvons dire : *La condition nécessaire et suffisante pour que dans le plan projectif sur le champ K , il y ait des polarités uniformes et qu'exactement deux des côtés de tout triangle autopolaire par rapport à une polarité non uniforme coupent la conique de cette polarité est que le champ K soit un champ ordonné où tout élément positif est carré.* Ce cas est encore caractérisé par l'existence de polarités uniformes et la non existence de triangles autopolaires ayant exactement un côté sécant.

Les champs pour lesquels VI_1 est vrai sont tous de caractéristique autre que deux. En effet, dans un champ de caractéristique deux avec non carrés, nous avons, si a est non carré, que a^{-1} , $(1+a)$ et $(1+a^{-1})$ sont non carrés; ce dernier est de plus le rapport $(1+a)/a$ de deux non carrés; donc, un champ de caractéristique deux ne satisfait jamais à VI_1 .

Les champs ordonnés sont tous de caractéristique nulle. Des exemples de champs satisfaisant à VI_1 et de caractéristique non nulle sont fournis par les champs finis de caractéristique autre que deux. En effet, un tel champ K a $q = p^n$ éléments, (p , premier impair); K^* a $(q-1)$ éléments et C^* , qui en a $(q-1)/2$, est bien d'indice deux dans K^* . Ces champs ne sont pas ordonnés et fournissent donc soit le cas 3, soit le cas 5. Ces deux derniers cas comprennent tous deux la propriété I_2 ; nous retrouvons le fait que toute polarité sur

un champ fini (de caractéristique autre que deux ⁽¹⁾) est non uniforme, propriété qui peut s'établir par un raisonnement direct ⁽²⁾.

Les champs finis de caractéristique autre que deux fournissent le cas 3 ou le cas 5 suivant que (-1) est carré ou non carré; cela revient à $q = m4 + 1$ ou à $q = m4 - 1$. En effet, \mathbf{K}^* est un groupe multiplicatif cyclique d'ordre $(q - 1)$; il existe donc a avec $x = a^{(q-1)/2} \neq 1$ et $x^2 = a^{q-1} = 1$; donc $a^{(q-1)/2} = -1$. La condition nécessaire et suffisante pour que (-1) soit carré est que $(q - 1)/2$ soit congru à un multiple de deux modulo $(q - 1)$, ce qui revient à $(q - 1)$ est multiple de 4. Traduisant ce résultat par rapport à p et n , nous avons pour les champs finis à $q = p^n$ éléments, p premier impair, qu'ils appartiennent au cas 3 si $p = m4 - 1$ et n pair ou si $p = m4 + 1$; ils appartiennent au cas 5 si $p = m4 - 1$ et n impair.

Nous pouvons encore remarquer que les cas 3, 4, 5 sont les seuls pour chacun desquels une et une seule des propriétés I_1, II_1, III_1 ait lieu et que les cas 4 ou 5 sont les seuls où il y ait des triangles autopolaires avec exactement deux côtés sécants et aucun pareil triangle avec un seul côté sécant.

(1) La restriction à $p \neq 2$ peut être levée, car dans un champ fini de caractéristique deux, tout élément est carré et la conique d'une polarité d'un plan projectif sur un tel champ est toujours une droite.

(2) Cfr. B. SEGRE, *Problèmes arithmétiques en géométrie algébrique*, Colloque de géométrie algébrique tenu à Liège les 19, 20 et 21 décembre 1949, p. 138-139; Liège, Georges Thone. Comme M. Segre l'a souligné, ce fait revient à : Une forme quadratique à trois variables sur le champ fini \mathbf{K} n'est jamais vide. En voici une démonstration directe autre que celle de M. Segre. Si \mathbf{K} est de caractéristique autre que deux et a q éléments, il renferme $(q + 1)/2$ carrés; ce nombre ne divise pas q ; donc l'ensemble des carrés ne forme pas un sous-groupe additif de \mathbf{K} et puisque \mathbf{K} est fini, cet ensemble n'est pas stable pour l'addition; il existe donc u et v tels que $(u^2 + v^2)$ ne soit pas carré et, puisque \mathbf{K} est un champ, il existe pour tout v non nul un u tel que $(u^2 + v^2)$, ne soit pas carré. Dans \mathbf{K} , le produit et le rapport de deux non carrés sont carrés; donc, si a_1 et a_2 sont des non carrés, il existe un u tel que $(u^2 + a_2/a_1)$ ne soit pas carré et donc tel que $(a_1 u^2 + a_2)$ soit carré; ainsi, quels que soient a_1 et a_2 , il existe u et v non tous deux nuls tels que $(a_1 u^2 + a_2 v^2)$ soit carré. L'équation obtenue en égalant à zéro une forme quadratique à trois variables non identiquement nulle se ramène, par un changement de variables, à la forme $x_3^2 = a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2$, qui, en vertu de ce qui précède, admet toujours une solution non triviale. Si le champ fini \mathbf{K} est de caractéristique deux, tous ses éléments sont carrés; de plus, toute expression quadratique sans terme rectangle est le carré d'une forme linéaire; donc, toute forme quadratique à trois variables se ramène par un changement de variables à la forme $a_{1,1} x_1^2 + a_{1,2} x_1 x_2 + a_{1,3} x_1 x_3 + a_{2,3} x_2 x_3$, qui s'annule pour le point $(0,0,1)$.

5. La condition II_1 est équivalente à : Il existe a non nul tel que ni a , ni $(1 - a)$, ni $(1 - a^{-1})$ ne soient carrés. Pour le voir il suffit d'exprimer que l'on peut choisir a_1 et a_2 dans (1) de façon que cette équation soit vérifiée par $(1, 1, 1)$ et ne soit vérifiée par aucun point des côtés du triangle de référence. En particulier, si la caractéristique est deux, II_1 revient à V_2 : Il existe des non carrés. Corrélativement, II_2 est équivalent à : Pour tout a non nul, une au moins des quantités a , $(1 - a)$, $(1 - a^{-1})$ est un carré; si la caractéristique est deux, cela revient à V_1 : Tout a est carré.

6. Dans le cas particulier d'un champ de caractéristique deux, (-1) est toujours carré; par ce qui précède immédiatement, nous avons II_1 ou II_2 suivant qu'il existe ou non des non carrés; de plus, le cas 3 est exclu. Les seuls cas restants sont les cas 1, 2 et 8 avec comme exemples : pour le cas 1, tout champ fini de caractéristique deux; pour le cas deux, le champ des fonctions rationnelles à deux variables sur le champ \mathbf{Z}_2 des classes de restes modulo 2 et pour le cas 8, le champ des fonctions rationnelles à une variable sur \mathbf{Z}_2 ⁽¹⁾.

L'utilisation du fait que dans le cas présent, la conique d'une polarité est soit une droite, soit un point, soit vide, permet de rendre directement compte à partir du tableau du paragraphe 2 du fait que seuls les cas 1, 2, et 8 sont possibles.

7. Citons encore quelques exemples de caractéristique non égale à deux. Pour le cas 6, nous avons le champ \mathbf{Q} des rationnels et tout champ $\mathbf{K}(t)$ où \mathbf{K} est un champ avec (-1) non carré; pour le cas 4, le champ des réels, celui des algébriques réels; tout ensemble de nombres réels exprimables, par un nombre fini d'additions, de soustractions, de multiplications, de divisions par un nombre non nul et d'extractions de racines carrées de nombres positifs, à partir de nombres appartenant à un ensemble non vide de nombres réels; pour le cas 2, tout $\mathbf{K}(t)$ où \mathbf{K} est un champ de caractéristique autre que deux, renfermant des non carrés et dans lequel (-1) est carré.

⁽¹⁾ Plus généralement, si \mathbf{L} est un champ de caractéristique deux et t une indéterminée, $\mathbf{K} = \mathbf{L}(t)$ fournit le cas 2 ou le cas 8 suivant que \mathbf{L} a ou non des non carrés.

Fonctions de Bessel et Calcul symbolique

PAR

M. Pierre HUMBERT

Les images symboliques des fonctions de Bessel sont connues et utilisées depuis fort longtemps : n'importe quel répertoire de calcul symbolique donne les correspondances :

$$J_n(t) \supset \frac{p}{\sqrt{p^2 + 1} [p + \sqrt{p^2 + 1}]^n}$$

ou, s'il s'agit de fonctions d'argument imaginaire,

$$I_n(t) \supset \frac{p}{\sqrt{p^2 - 1} [p + \sqrt{p^2 - 1}]^n}$$

Il n'y a pas lieu de revenir sur ces représentations, qui sont définitives. Mais on peut considérer les fonctions de Bessel comme fonctions, non plus de leur argument, comme ci-dessus, mais de leur indice : de sorte que nous sommes amenés à étudier l'image, non plus d'une fonction $J_n(t)$ ou $I_n(t)$, mais d'une fonction $J_t(x)$ ou $I_t(x)$, t étant comme d'habitude, la variable du calcul symbolique, et x étant considéré comme un paramètre quelconque. Nous pensons que ce sujet n'a pas été abordé jusqu'ici.

I

Soit donc — nous choisissons cette fonction de préférence à J , pour simplifier certains calculs — la fonction de Bessel $I_t(x)$, qui s'écrit au moyen du développement bien connu,

$$I_t(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{t+2m}}{m! \Gamma(t+m+1)}$$

Nous pouvons écrire

$$x^{\frac{t}{2}} I_t(2\sqrt{x}) = \sum_m \frac{x^{m+\frac{t}{2}}}{m! \Gamma(t+m+1)}$$

Or on connaît l'image symbolique de la fonction $\frac{1}{\Gamma(t+m+1)}$:
si nous introduisons la fonction

$$v(t, m) = \int_m^\infty \frac{t^x}{\Gamma(x+1)} dx,$$

que l'on appelle fonction v -incomplète ⁽¹⁾, on a en effet la correspondance symbolique

$$\frac{1}{\Gamma(t+m+1)} \supset p e^{mp} v(e^{-p}, m)$$

L'application de la règle

$$x^t f(t) \supset \frac{p}{p - \log x} \varphi(p - \log x)$$

nous donne immédiatement

$$\begin{aligned} \frac{x^{t+m}}{\Gamma(t+m+1)} &\supset x^m \frac{p}{p - \log x} (p - \log x) e^{m(p - \log x)} v(e^{-p + \log x}, m) \\ &= p e^{mp} v(x e^{-p}, m) \end{aligned}$$

D'où

$$x^{\frac{t}{2}} I_t(2\sqrt{x}) \supset p \sum_m \frac{e^{mp}}{m!} v(x e^{-p}, m)$$

On en tire

$$x^t I_t(2x) \supset p \sum_m \frac{e^{mp}}{m!} v(x^2 e^{-p}, m)$$

et, par application de la règle déjà mentionnée ci-dessus,

$$I_t(2x) \supset p \sum_m \frac{e^{m(p + \log x)}}{m!} v(x^2 e^{-p - \log x}, m)$$

D'où, enfin, la formule que nous voulions établir,

$$I_t(x) \supset p \sum_m \frac{e^{mp} x^m}{m! 2^m} v\left(\frac{x}{2} e^{-p}, m\right)$$

⁽¹⁾ P. HUMBERT et L. POLI. Sur certaines transcendances liées au Calcul symbolique. *Bull. Sc. Math.*, 2^e série, t. LXVIII, nov.-déc. 1944.

On peut vérifier cette correspondance au moyen de l'équation de Bessel : on a en effet, les dérivées étant prises par rapport à x ,

$$x^2 I_t'' + x I_t' - (x^2 + t^2) I_t = 0$$

Si nous nous souvenons que

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} v(\alpha, m) = v(\alpha, m-1),$$

nous aurons successivement

$$\begin{aligned} x I_t' &\supset p \Sigma \frac{e^{mp}}{(m-1)!} \frac{x^m}{2^m} v\left(\frac{x}{2} e^{-p}, m\right) + p \Sigma \frac{e^{(m-1)p}}{m!} \frac{x^{m+1}}{2^{m+1}} v\left(\frac{x}{2} e^{-p}, m-1\right) \\ x^2 I_t'' &\supset p \Sigma \frac{e^{mp}}{(m-2)!} \frac{x^m}{2^m} v\left(\frac{x}{2} e^{-p}, m\right) \\ &+ 2p \Sigma \frac{e^{(m-1)p}}{(m-1)!} \frac{x^{m+1}}{2^{m+1}} v\left(\frac{x}{2} e^{-p}, m-1\right) + p \Sigma \frac{e^{(m-2)p}}{m!} \frac{x^{m+2}}{2^{m+2}} v\left(\frac{x}{2} e^{-p}, m-2\right) \\ &- x^2 I_t \supset -p \Sigma \frac{e^{mp}}{m!} \frac{x^{m+2}}{2^m} v\left(\frac{x}{2} e^{-p}, m\right) \end{aligned}$$

et enfin, en appliquant la règle symbolique

$$t^2 f(t) \supset p \frac{d^2}{dp^2} \left[\frac{\varphi(p)}{p} \right],$$

nous aurons

$$\begin{aligned} -t^2 I_t &\supset p \Sigma \frac{-m}{(m-1)!} e^{mp} \frac{x^m}{2^m} v\left(\frac{x}{2} e^{-p}, m\right) \\ &+ p \Sigma \frac{e^{(m-1)p}}{(m-1)!} \frac{x^{m+1}}{2^{m+1}} v\left(\frac{x}{2} e^{-p}, m-1\right) \\ &+ p \Sigma \frac{m-1}{m!} e^{(m-1)p} \frac{x^{m+1}}{2^{m+1}} v\left(\frac{x}{2} e^{-p}, m-1\right) \\ &- p \Sigma \frac{e^{(m-2)p}}{m!} \frac{x^{m+2}}{2^{m+2}} v\left(\frac{x}{2} e^{-p}, m-2\right) \end{aligned}$$

Si nous faisons la somme de toutes ces relations, membre à membre, nous constatons tout de suite que les termes en $v\left(\frac{x}{2} e^{-p}, m-2\right)$ se détruisent. D'autre part, les termes en $v\left(\frac{x}{2} e^{-p}, m\right)$ se détruisent

également, à l'exclusion de celui qui provient de $-x^2 I_t$. Enfin les termes en $\nu\left(\frac{x}{2}e^{-p}, m-1\right)$, réunis, donnent

$$p \sum \frac{4}{(m-1)!} e^{(m-1)p} \frac{x^{m+1}}{2^{m+1}} \nu\left(\frac{x}{2}e^{-p}, m-1\right)$$

Mais le terme provenant de $-x^2 I_t$ s'écrit

$$-p \sum \frac{e^{mp} x^{m+2}}{m! 2^m} \nu\left(\frac{x}{2}e^{-p}, m\right) = -p \sum \frac{e^{(m-1)p} x^{m+1}}{(m-1)! 2^{m-1}} \nu\left(\frac{x}{2}e^{-p}, m-1\right),$$

de sorte que tout disparaît, et on trouve bien zéro comme second membre de l'équation différentielle.

Ainsi l'image symbolique de $I_t(x)$ s'exprime par une série au moyen de la fonction ν -incomplète.

II

Il est alors indiqué de chercher une généralisation des résultats ci-dessus en utilisant le calcul symbolique à deux variables ⁽¹⁾. Rappelons que ce calcul fait correspondre à la fonction de deux variables $f(x, y)$ une image symbolique $\varphi(p, q)$ donnée par

$$\varphi(p, q) = pq \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(px+qy)} f(x, y) dx dy.$$

On écrit alors

$$f(x, y) \supset \supset \varphi(p, q)$$

Reprenant l'une des formules démontrées précédemment, écrivons-la

$$x^2 I_y(2\sqrt{x}) \supset q \sum \frac{e^{mq}}{m!} \nu(xe^{-q}, m)$$

la variable de transformation q correspondant à la variable y , et la relation étant une relation symbolique ordinaire. Nous en ferons une relation de calcul symbolique à deux variables en transformant x : nous savons que

$$\nu(x, m) \supset \frac{1}{p^m \log p}$$

⁽¹⁾ P. HUMBERT. Le calcul symbolique à deux variables. *Ann. Soc. Sc. Bruxelles*, série A, t. 56, 1936, p. 26.

Par conséquent

$$v(xe^{-q}, m) \supset \frac{e^{-mq}}{p^m \log(pe^q)}$$

D'où

$$x^{\frac{y}{2}} I_y(2\sqrt{x}) \supset \supset q \Sigma \frac{e^{mq}}{m!} \frac{e^{-mq}}{p^m \log(pe^q)}$$

Et enfin

$$x^{\frac{y}{2}} I_y(2\sqrt{x}) \supset \supset \frac{q}{q + \log p} e^{\frac{1}{p}}$$

Cette correspondance très simple peut s'obtenir par une méthode différente, et d'ailleurs plus rapide. On connaît la correspondance à une variable, entre x et p , ⁽¹⁾

$$x^{\frac{y}{2}} I_y(2\sqrt{x}) \supset p^{-y} e^{\frac{1}{p}}$$

Mais, entre y et q , on a

$$\left(\frac{1}{p}\right)' \supset \frac{q}{q + \log p},$$

puisque

$$a^y \supset \frac{q}{q - \log a}$$

D'où le résultat

$$x^{\frac{y}{2}} I_y(2\sqrt{x}) \supset \supset \frac{q}{q + \log p} e^{\frac{1}{p}}$$

Nous obtiendrons des formules analogues en partant d'autres correspondances : ainsi l'on a

$$I_y(x) \supset \frac{p}{\sqrt{p^2 - 1} [p + \sqrt{p^2 - 1}]^y}$$

D'où

$$I_y(x) \supset \supset \frac{pq}{\sqrt{p^2 - 1} [q + \log(p + \sqrt{p^2 - 1})]} = \frac{pq}{\sqrt{p^2 - 1} [q + \arg ch p]}$$

(1) N.W. Mc LACHLAN et P. HUMBERT. — Formulaire pour le Calcul symbolique. *Mémorial Sc. Math.*, fascicule C, 1941.

De la même manière, revenant, aux fonctions de Bessel ordinaires, on écrira

$$J_y(x) \supset \supset \frac{pq}{\sqrt{p^2 + 1}[q + \log(p + \sqrt{p^2 + 1})]} = \frac{pq}{\sqrt{p^2 + 1}[q + \arg sh p]}$$

Enfin, si nous considérons la fonction de Bessel intégrale, définie par

$$Ji_n(x) = \int_x^\infty \frac{J_n(x)}{x} dx,$$

nous avons la correspondance à une variable, entre x et p ,

$$y Ji_y(x) \supset 1 - (\sqrt{p^2 + 1} - p)^y$$

et par conséquent

$$y Ji_y(x) \supset \supset 1 - \frac{q}{q - \log(\sqrt{p^2 + 1} - p)} = \frac{\arg sh p}{q + \arg sh p}$$

III

Il y a encore une autre manière de considérer les fonctions de Bessel à la lumière du calcul symbolique : on peut les voir, non comme originaux, mais comme images, et introduire leur indice comme variable symbolique. Divers résultats ont déjà été signalés dans ce sens : c'est ainsi que le Formulaire (voir note 3) indique la correspondance suivante, où K est la fonction de Bessel définie par

$$K_n(x) = \frac{\pi}{2 \sin n\pi} [I_{-n}(x) - I_n(x)]$$

et où, t étant la variable à transformer et p la variable symbolique, on considère x comme un paramètre quelconque :

$$p K_p(x) I_p(x) \subset \frac{1}{2} J_0(2x sh t)$$

Donnons, comme exemple de ce genre d'études, une représentation à deux variables introduisant la fonction K . On connaît (voir Formulaire) la correspondance à une variable

$$p^{\frac{n+1}{2}} K_n(\sqrt{p}) \subset \frac{e^{-\frac{1}{4t}}}{(2t)^{n+1}}$$

Remplaçons t par x , variable correspondant à p , et n par $\frac{1}{q}$, q étant la seconde variable symbolique, correspondant à y .
On aura donc

$$p^{\frac{1}{2q}+1} K_{\frac{1}{q}}(\sqrt{p}) \subset \frac{e^{-\frac{1}{4x}}}{2x} (2x)^{-\frac{1}{q}}$$

Mais, en considérant x comme un paramètre,

$$(2x)^{-\frac{1}{q}} = e^{-\frac{\log 2x}{q}} \supset J_o(2\sqrt{y \log 2x})$$

D'où la correspondance

$$p^{\frac{1}{2q}+1} K_{\frac{1}{q}}(\sqrt{p}) \subset \frac{e^{-\frac{1}{4x}}}{2x} J_o(2\sqrt{y \log 2x})$$

Sur les équations récurrentes, aux différentielles totales, complètement intégrables

PAR

R. H. GERMAÏ

Professeur à l'Université de Liège

§ 1. Généralités.

Le but de cette Note est d'étendre aux équations récurrentes, aux différentielles totales, complètement intégrables, la théorie de M. L. Bruwier relative aux équations récurro-différentielles ⁽¹⁾. Précisons d'abord de quelles équations il sera question dans le travail actuel.

Considérons deux suites indéfinies de fonctions des quatre variables x, y, u, v

$$(1) \quad \begin{cases} P_1(x, y, u, v), P_2(x, y, u, v), \dots, P_k(x, y, u, v), P_{k+1}(x, y, u, v), \dots \\ Q_1(x, y, u, v), Q_2(x, y, u, v), \dots, Q_k(x, y, u, v), Q_{k+1}(x, y, u, v), \dots \end{cases}$$

données dans le champ de variation

$$(2) \quad |x - x_0| \leq a, \quad |y - y_0| \leq b, \quad |u - z_0| \leq c, \quad |v - z_0| \leq c$$

les lettres a, b, c désignant des nombres positifs fixes et x_0, y_0, z_0 représentant un certain système de valeurs numériques des variables x, y, u, v ; la même valeur numérique z_0 intervient pour les deux variables u et v .

Supposons que les fonctions P_k, Q_k soient continues et bornées dans leur ensemble dans le champ de variation (2) où elles sont définies et qu'elles y admettent les dérivées partielles continues

⁽¹⁾ L. BRUWIER, *Sur une classe d'équations récurro-différentielles* dans les *Mémoires de la Société royale des Sciences de Liège*, 3^e série, in 8^o, t. XVII, fascicule 4, 1932.

$$(3) \left\{ \begin{array}{llll} \frac{\partial P_1}{\partial y}, & \frac{\partial P_2}{\partial y}, & \dots\dots & \frac{\partial P_k}{\partial y}, \quad \frac{\partial P_{k+1}}{\partial y}, \dots\dots \\ \frac{\partial Q_1}{\partial x}, & \frac{\partial Q_2}{\partial x}, & \dots\dots & \frac{\partial Q_k}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q_{k+1}}{\partial x}, \dots\dots \\ \frac{\partial P_1}{\partial u}, & \frac{\partial P_2}{\partial u}, & \dots\dots & \frac{\partial P_k}{\partial u}, \quad \frac{\partial P_{k+1}}{\partial u}, \dots\dots \\ \frac{\partial P_1}{\partial v}, & \frac{\partial P_2}{\partial v}, & \dots\dots & \frac{\partial P_k}{\partial v}, \quad \frac{\partial P_{k+1}}{\partial v}, \dots\dots \\ \frac{\partial Q_1}{\partial u}, & \frac{\partial Q_2}{\partial u}, & \dots\dots & \frac{\partial Q_k}{\partial u}, \quad \frac{\partial Q_{k+1}}{\partial u}, \dots\dots \\ \frac{\partial Q_1}{\partial v}, & \frac{\partial Q_2}{\partial v}, & \dots\dots & \frac{\partial Q_k}{\partial v}, \quad \frac{\partial Q_{k+1}}{\partial v}, \dots\dots \end{array} \right.$$

Supposons aussi que ces dérivées soient bornées dans leur ensemble.
Considérons alors les équations récurrentes aux différentielles totales

$$(4) \quad dz_k = P_k(x, y, z_k, z_{k+1}) dx + Q_k(x, y, z_k, z_{k+1}) dy \\ (k = 1, 2, 3, \dots)$$

Admettons provisoirement que nous ayons pu démontrer que ces équations possèdent un système de solutions

$$(5) \quad z_1(x, y); z_2(x, y), \dots\dots z_k(x, y), z_{k+1}(x, y), \dots\dots$$

fonctions continues de x, y dans un certain champ de variation de « centre » x_o, y_o prenant en x_o, y_o la valeur numérique z_o .

Les fonctions z_k, z_{k+1} , donnent lieu alors aux relations

$$(6) \quad \frac{\partial z_k}{\partial x} = P_k(x, y; z_k, z_{k+1}), \quad \frac{\partial z_k}{\partial y} = Q_k(x, y; z_k, z_{k+1})$$

Il en résulte que

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 z_k}{\partial x \partial y} = \frac{\partial P_k}{\partial y} + \frac{\partial P_k}{\partial u} \cdot \frac{\partial z_k}{\partial y} + \frac{\partial P_k}{\partial v} \cdot \frac{\partial z_{k+1}}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 z_k}{\partial y \partial x} = \frac{\partial Q_k}{\partial x} + \frac{\partial Q_k}{\partial u} \cdot \frac{\partial z_k}{\partial x} + \frac{\partial Q_k}{\partial v} \cdot \frac{\partial z_{k+1}}{\partial x} \end{array} \right.$$

On doit avoir ainsi

$$(8) \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial P_k}{\partial y} [x, y; z_k(x, y), z_{k+1}(x, y)] \\ & + \frac{\partial P_k}{\partial u} [x, y; z_k(x, y), z_{k+1}(x, y)] \cdot Q_k [x, y; z_k(x, y), z_{k+1}(x, y)] \\ & + \frac{\partial P_k}{\partial v} [x, y; z_k(x, y), z_{k+1}(x, y)] \cdot Q_{k+1} [x, y; z_k(x, y), z_{k+1}(x, y)] \\ & = \frac{\partial Q_k}{\partial x} [x, y; z_k(x, y), z_{k+1}(x, y)] \\ & + \frac{\partial Q_k}{\partial u} [x, y; z_k(x, y), z_{k+1}(x, y)] \cdot P_k [x, y; z_k(x, y), z_{k+1}(x, y)] \\ & + \frac{\partial Q_k}{\partial v} [x, y; z_k(x, y), z_{k+1}(x, y)] \cdot P_{k+1} [x, y; z_k(x, y), z_{k+1}(x, y)] \end{aligned} \right.$$

($k = 1, 2, \dots, n$)

Pour écrire ces conditions, nous avons *postulé* l'existence des solutions des équations (4). Les égalités (8) doivent avoir lieu quand les variables u, v sont remplacées dans les fonctions P_k, Q_k et dans leurs dérivées partielles

$$(9) \quad \frac{\partial P_k}{\partial y}, \quad \frac{\partial P_k}{\partial u}, \quad \frac{\partial P_k}{\partial v}, \quad \frac{\partial Q_k}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q_k}{\partial u}, \quad \frac{\partial Q_k}{\partial v}$$

par les solutions z_k, z_{k+1} supposées existantes.

Or, c'est précisément cette existence qu'il faudrait démontrer.

Modifions notre point de vue en supposant que les égalités (8) aient lieu identiquement lorsque x, y, u, v ont des valeurs numériques quelconques appartenant au champ de variation (2), savoir :

$$(10) \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial P_k}{\partial y} (x, y; u, v) \\ & + \frac{\partial P_k}{\partial u} (x, y; u, v) \cdot Q_k (x, y; u, v) + \frac{\partial P_k}{\partial v} (x, y; u, v) \cdot Q_{k+1} (x, y; u, v) \\ & = \frac{\partial Q_k}{\partial x} (x, y; u, v) \\ & + \frac{\partial Q_k}{\partial u} (x, y; u, v) \cdot P_k (x, y; u, v) + \frac{\partial Q_k}{\partial v} (x, y; u, v) \cdot P_{k+1} (x, y; u, v) \end{aligned} \right.$$

($k = 1, 2, \dots, n$)

Nous dirons alors que les équations récurrentes aux différentielles

totales (4) sont *complètement intégrables*; mais nous aurons à démontrer qu'elles définissent un système unique d'intégrales(5) satisfaisant aux conditions initiales indiquées.

§ 2. — *Construction de suites indéfinies de fonctions.*

Pour simplifier un peu les calculs, nous supposons que les valeurs initiales x_o, y_o, z_o sont égales à zéro; le champ de variation (2) sera défini ainsi par les relations

$$(11) \quad |x| \leq a, \quad |y| \leq b, \quad |u| \leq c, \quad |v| \leq c$$

Nous utiliserons la méthode d'approximations successives proposée par M. Nikliborc (1) pour l'intégration des équations aux différentielles totales complètement intégrables.

Définissons d'abord un nouveau champ de variation des variables indépendantes x et y . Les fonctions P_k, Q_k sont bornées dans leur ensemble; elles satisfont ainsi aux relations

$$(12) \quad |P_k(x, y; u, v)| < M, \quad |Q_k(x, y; u, v)| < M, \quad (k = 1, 2, \dots)$$

M désignant un nombre positif fixe. Nous prendrons des valeurs de x et de y vérifiant les relations

$$(13) \quad |x| \leq a, \quad |x| \leq \frac{c}{2M}, \quad |y| \leq b, \quad |y| \leq \frac{c}{2M}$$

Partant des valeurs initiales

$$(14) \quad z_{k,o} = z_{k+1,o} = 0, \quad (k = 1, 2, \dots)$$

nous calculerons une première suite de fonctions

$$(15) \quad z_{1,1}(x, y), z_{2,1}(x, y), \dots, z_{k,1}(x, y), z_{k+1,1}(x, y), \dots$$

au moyen des formules

$$\left\{ \begin{array}{l} z_{1,1}(x, y) = \int_0^1 \{ P_1(tx, ty; z_{1,o}, z_{2,o})x + Q_1(tx, ty; z_{1,o}, z_{2,o})y \} dt \\ \dots \dots \dots \\ z_{k,1}(x, y) = \int_0^1 \{ P_k(tx, ty; z_{k,o}, z_{1,o})x + Q_k(tx, ty; z_{k,o}, z_{1,o})y \} dt \\ \dots \dots \dots \\ z_{k+1,1}(x, y) = \int_0^1 \{ P_{k+1}(tx, ty; z_{k+1,o}, z_{k+2,o})x + Q_{k+1}(tx, ty; z_{k+1,o}, z_{k+2,o})y \} dt \\ \dots \dots \dots \end{array} \right.$$

(1) W. NIKLIBORC, *Sur les équations linéaires aux différentielles totales* dans *Studia Mathematica*, t. I, 1929, pp. 41-49.

§ 3. — Convergence uniforme des suites (21).

Nous pouvons écrire

$$(22) \quad z_{\mathbf{k},\mu+1}(x, y) - z_{\mathbf{k},\mu}(x, y) = \int_0^1 \left[\begin{aligned} & \left\{ \begin{aligned} & P_{\mathbf{k}}[tx, ty; z_{\mathbf{k},\mu}(tx, ty), z_{\mathbf{k}+1,\mu}(tx, ty)] \\ & - P_{\mathbf{k}}[tx, ty; z_{\mathbf{k},\mu-1}(tx, ty), z_{\mathbf{k}+1,\mu-1}(tx, ty)] \end{aligned} \right\} x \\ & + \left\{ \begin{aligned} & Q_{\mathbf{k}}[tx, ty; z_{\mathbf{k},\mu}(tx, ty), z_{\mathbf{k}+1,\mu}(tx, ty)] \\ & - Q_{\mathbf{k}}[tx, ty; z_{\mathbf{k},\mu-1}(tx, ty), z_{\mathbf{k}+1,\mu-1}(tx, ty)] \end{aligned} \right\} y \end{aligned} \right] dt$$

Désignons par A un nombre positif supérieur à la valeur absolue de toutes les fonctions

$$\frac{\partial P_{\mathbf{k}}}{\partial u}, \quad \frac{\partial P_{\mathbf{k}}}{\partial v}, \quad \frac{\partial Q_{\mathbf{k}}}{\partial u}, \quad \frac{\partial Q_{\mathbf{k}}}{\partial v}$$

Par application du théorème des accroissements finis, nous obtenons les inégalités

$$(23) \quad \left\{ \begin{aligned} & \left| \begin{aligned} & P_{\mathbf{k}}[tx, ty; z_{\mathbf{k},\mu}(tx, ty), z_{\mathbf{k}+1,\mu}(tx, ty)] \\ & - P_{\mathbf{k}}[tx, ty; z_{\mathbf{k},\mu-1}(tx, ty), z_{\mathbf{k}+1,\mu-1}(tx, ty)] \end{aligned} \right| \\ & < A \{ |z_{\mathbf{k},\mu}(tx, ty) - z_{\mathbf{k},\mu-1}(tx, ty)| + |z_{\mathbf{k}+1,\mu}(tx, ty) - z_{\mathbf{k}+1,\mu-1}(tx, ty)| \\ & \left| \begin{aligned} & Q_{\mathbf{k}}[tx, ty; z_{\mathbf{k},\mu}(tx, ty), z_{\mathbf{k}+1,\mu}(tx, ty)] \\ & - Q_{\mathbf{k}}[tx, ty; z_{\mathbf{k},\mu-1}(tx, ty), z_{\mathbf{k}+1,\mu-1}(tx, ty)] \end{aligned} \right| \\ & < A \{ |z_{\mathbf{k},\mu}(tx, ty) - z_{\mathbf{k},\mu-1}(tx, ty)| + |z_{\mathbf{k}+1,\mu}(tx, ty) - z_{\mathbf{k}+1,\mu-1}(tx, ty)| \end{aligned} \right.$$

Nous tirons des formules (22) et (23) l'inégalité récurrente

$$(24) \quad \begin{aligned} & |z_{\mathbf{k},\mu+1}(x, y) - z_{\mathbf{k},\mu}(x, y)| \\ & < 2A \int_0^1 \left\{ |z_{\mathbf{k},\mu}(tx, ty) - z_{\mathbf{k},\mu-1}(tx, ty)| \right. \\ & \quad \left. + |z_{\mathbf{k}+1,\mu}(tx, ty) - z_{\mathbf{k}+1,\mu-1}(tx, ty)| \right\} \{ |x| + |y| \} dt \end{aligned}$$

Rappelons que M est un nombre positif fixe supérieur au module de toutes les fonctions P_k, Q_k . Les conditions initiales

$$(25) \quad z_{k,0} = z_{k+1,0} = 0$$

donnent immédiatement

$$(26) \quad |z_{k,1}(x, y) - z_{k,0}| < M \{ |x| + |y| \}$$

Par applications répétées de la formule (24), on obtient de proche en proche

$$(27) \quad |z_{k,\mu+1}(x, y) - z_{k,\mu}(x, y)| < \int_0^1 2A \{ |x| + |y| \} \cdot (2A)^{\mu-1} \cdot M \frac{\{ |x| + |y| \}^\mu}{\mu!} \cdot t^\mu dt$$

$$(28) \quad |z_{k,\mu+1}(x, y) - z_{k,\mu}(x, y)| < M \cdot (2A)^\mu \frac{\{ |x| + |y| \}^{\mu+1}}{(\mu+1)!}.$$

La convergence absolue et uniforme des séries

$$(29) \quad \sum_{\mu=0}^{\mu=\infty} \{ z_{k,\mu+1}(x, y) - z_{k,\mu}(x, y) \}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

en résulte immédiatement. Autant dire que les suites (21) sont uniformément convergentes. Leurs limites sont des fonctions continues $z_{k,\infty}(x, y)$ s'annulant en $x = y = 0$ dont les valeurs appartiennent à l'intervalle $(-c, +c)$ quand celles de x, y appartiennent au champ de variation (13).

§ 4. — Convergence uniforme des suites

$$(30) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial z_{k,1}}{\partial x}(x, y), \quad \frac{\partial z_{k,2}}{\partial x}(x, y), \dots, \quad \frac{\partial z_{k,\mu}}{\partial x}(x, y), \dots \\ \frac{\partial z_{k,1}}{\partial y}(x, y), \quad \frac{\partial z_{k,2}}{\partial y}(x, y), \dots, \quad \frac{\partial z_{k,\mu}}{\partial y}(x, y), \dots \end{array} \right. \quad (k=1, 2, 3, \dots)$$

Nous pouvons écrire

$$(31) \quad \frac{\partial z_{\kappa, \mu+1}}{\partial x}(x, y) = \int_0^1 \left[\begin{aligned} & P_{\kappa} [tx, ty; z_{\kappa, \mu}(tx, ty), z_{\kappa+1, \mu}(tx, ty)] \\ & + tx \left\{ \frac{\partial P_{\kappa}}{\partial x} [tx, ty; z_{\kappa, \mu}(tx, ty), z_{\kappa+1, \mu}(tx, ty)] \right. \\ & \quad + \frac{\partial P_{\kappa}}{\partial u} [tx, ty; z_{\kappa, \mu}(tx, ty), z_{\kappa+1, \mu}(tx, ty)] \frac{\partial z_{\kappa, \mu}}{\partial x}(tx, ty) \\ & \quad \left. + \frac{\partial P_{\kappa}}{\partial v} [tx, ty; z_{\kappa, \mu}(tx, ty), z_{\kappa+1, \mu}(tx, ty)] \frac{\partial z_{\kappa+1, \mu}}{\partial x}(tx, ty) \right\} \\ & + ty \left\{ \frac{\partial Q_{\kappa}}{\partial x} [tx, ty; z_{\kappa, \mu}(tx, ty), z_{\kappa+1, \mu}(tx, ty)] \right. \\ & \quad + \frac{\partial Q_{\kappa}}{\partial u} [tx, ty; z_{\kappa, \mu}(tx, ty), z_{\kappa+1, \mu}(tx, ty)] \frac{\partial z_{\kappa+1, \mu}}{\partial x}(tx, ty) \\ & \quad \left. + \frac{\partial Q_{\kappa}}{\partial v} [tx, ty; z_{\kappa, \mu}(tx, ty), z_{\kappa+1, \mu}(tx, ty)] \frac{\partial z_{\kappa+1, \mu}}{\partial y}(tx, ty) \right\} \end{aligned} \right] dt$$

Si nous cherchons la dérivée par rapport à t de l'expression

$$(32) \quad P_{\kappa} [tx, ty; z_{\kappa, \mu}(tx, ty), z_{\kappa+1, \mu}(tx, ty)]$$

nous en déduisons après quelques transformations

$$(33) \quad \left\{ \begin{aligned} & tx \left\{ \left[\frac{\partial P_{\kappa}}{\partial x} \right] + \left[\frac{\partial P_{\kappa}}{\partial u} \right] \frac{\partial z_{\kappa, \mu}}{\partial x}(tx, ty) + \left[\frac{\partial P_{\kappa}}{\partial v} \right] \frac{\partial z_{\kappa+1, \mu}}{\partial x}(tx, ty) \right\} \\ & = t \frac{d}{dt} [P_{\kappa}] - ty \left\{ \left[\frac{\partial P_{\kappa}}{\partial y} \right] + \left[\frac{\partial P_{\kappa}}{\partial u} \right] \frac{\partial z_{\kappa, \mu}}{\partial y}(tx, ty) + \left[\frac{\partial P_{\kappa}}{\partial v} \right] \frac{\partial z_{\kappa+1, \mu}}{\partial y}(tx, ty) \right\} \end{aligned} \right.$$

Nous convenons d'écrire, pour abréger ,

$$(34) \quad [P_{\kappa}] = P_{\kappa} [tx, ty, z_{\kappa, \mu}(tx, ty), z_{\kappa+1, \mu}(tx, ty)], \text{ etc.}$$

En remplaçant dans la formule (31), nous obtenons

$$(35) \quad \frac{\partial z_{\kappa, \mu+1}}{\partial x}(x, y)$$

$$= \int_0^1 \left\{ \begin{aligned} & [P_K] + t \frac{d}{dt} [P_K] \\ & + ty \left\{ \left[\frac{\partial Q_K}{\partial u} \right] \cdot \frac{\partial z_{K,\mu}}{\partial x} (tx, ty) - \left[\frac{\partial P_K}{\partial u} \right] \cdot \frac{\partial z_{K,\mu}}{\partial y} (tx, ty) \right\} \\ & + ty \left\{ \left[\frac{\partial Q_K}{\partial v} \right] \cdot \frac{\partial z_{K+1,\mu}}{\partial x} (tx, ty) - \left[\frac{\partial P_K}{\partial v} \right] \cdot \frac{\partial z_{K+1,\mu}}{\partial y} (tx, ty) \right\} \end{aligned} \right\} dt$$

La formule d'intégration par parties donne

$$(36) \left\{ \begin{aligned} & \int_0^1 \left\{ t \frac{d}{dt} [P_K] \right\} dt = \int_0^1 t \cdot \frac{d}{dt} \{ P_K[tx, ty, z_{K,\mu}(tx, ty), z_{K+1,\mu}(tx, ty)] \} dt \\ & = \{ P_K[tx, ty, z_{K,\mu}(tx, ty), z_{K+1,\mu}(tx, ty)] \}_0^1 - \int_0^1 P_K[tx, \dots, z_{K+1,\mu}(tx, ty)] dt \\ & = P_K[x, y; z_{K,\mu}(x, y), z_{K+1,\mu}(x, y)] - \int_0^1 [P_K] dt \end{aligned} \right.$$

L'égalité (35) s'écrit alors

$$(37) \quad \frac{\partial z_{K,\mu+1}}{\partial x} (x, y) - P_K[x, y, z_{K,\mu}(x, y), z_{K+1,\mu}(x, y)]$$

$$= \int_0^1 \left\{ \begin{aligned} & ty \left\{ \left[\frac{\partial Q_K}{\partial x} \right] - \left[\frac{\partial P_K}{\partial y} \right] \right\} \\ & + ty \left\{ \left[\frac{\partial Q_K}{\partial v} \right] \cdot \frac{\partial z_{K,\mu}}{\partial x} (tx, ty) - \left[\frac{\partial P_K}{\partial v} \right] \frac{\partial z_{K,\mu}}{\partial y} (tx, ty) \right\} \\ & + ty \left\{ \left[\frac{\partial Q_K}{\partial u} \right] \cdot \frac{\partial z_{K+1,\mu}}{\partial x} (tx, ty) - \left[\frac{\partial P_K}{\partial u} \right] \cdot \frac{\partial z_{K+1,\mu}}{\partial y} (tx, ty) \right\} \end{aligned} \right\} dt$$

Mais en vertu des conditions (10)

$$(38) \quad \frac{\partial Q_K}{\partial x} - \frac{\partial P_K}{\partial y} = \frac{\partial P_K}{\partial u} Q_K + \frac{\partial P_K}{\partial v} Q_{K+1} - \frac{\partial Q_K}{\partial u} P_K - \frac{\partial Q_K}{\partial v} P_{K+1}$$

Il en résulte que

$$(39) \quad \frac{\partial z_{K,\mu+1}}{\partial x} (x, y) - P_K[x, y, z_{K,\mu}(x, y), z_{K+1,\mu}(x, y)]$$

$$= y \int_0^1 t \left\{ \begin{aligned} & \left[\frac{\partial P_{\kappa}}{\partial u} \right] \left\{ [Q_{\kappa}] - \frac{\partial z_{\kappa, \mu}}{\partial y}(tx, ty) \right\} \\ & - \left[\frac{\partial Q_{\kappa}}{\partial u} \right] \left\{ [P_{\kappa}] - \frac{\partial z_{\kappa, \mu}}{\partial x}(tx, ty) \right\} \\ & + \left[\frac{\partial P_{\kappa}}{\partial v} \right] \left\{ [Q_{\kappa+1}] - \frac{\partial z_{\kappa+1, \mu}}{\partial y}(tx, ty) \right\} \\ & - \left[\frac{\partial Q_{\kappa}}{\partial v} \right] \left\{ [P_{\kappa+1}] - \frac{\partial z_{\kappa+1, \mu}}{\partial x}(tx, ty) \right\} \end{aligned} \right\} dt$$

Rappelons que dans les seconds membres figurent les approximations $z_{\kappa, \mu}(tx, ty)$, $z_{\kappa+1, \mu}(tx, ty)$ sous les signes fonctionnels encadrés de crochets; les dérivées de ces approximations figurent aussi dans ces seconds membres; elles sont rapportées aux mêmes arguments tx, ty . Pour obtenir une formule récurrente, il faut introduire dans les premiers membres des égalités telles que (39), les différences

$$(40) \quad \frac{\partial z_{\kappa, \mu+1}}{\partial x}(x, y) - P_{\kappa}[x, y, z_{\kappa, \mu+1}(x, y), z_{\kappa+1, \mu+1}(x, y)]$$

On obtient ainsi

$$(41) \quad \frac{\partial z_{\kappa, \mu+1}}{\partial x}(x, y) - P_{\kappa}[x, y; z_{\kappa, \mu+1}(x, y), z_{\kappa+1, \mu+1}(x, y)]$$

$$= P_{\kappa}[x, y; z_{\kappa, \mu}(x, y), z_{\kappa+1, \mu}(x, y)] - P_{\kappa}[x, y; z_{\kappa, \mu+1}(x, y), z_{\kappa+1, \mu+1}(x, y)]$$

$$+ y \int_0^1 t \left\{ \begin{aligned} & \left[\frac{\partial P_{\kappa}}{\partial u} \right] \left\{ [Q_{\kappa}] - \frac{\partial z_{\kappa, \mu}}{\partial y}(tx, ty) \right\} \\ & - \left[\frac{\partial Q_{\kappa}}{\partial u} \right] \left\{ [P_{\kappa}] - \frac{\partial z_{\kappa, \mu}}{\partial x}(tx, ty) \right\} \\ & + \left[\frac{\partial P_{\kappa}}{\partial v} \right] \left\{ [Q_{\kappa+1}] - \frac{\partial z_{\kappa+1, \mu}}{\partial y}(tx, ty) \right\} \\ & - \left[\frac{\partial Q_{\kappa}}{\partial v} \right] \left\{ [P_{\kappa+1}] - \frac{\partial z_{\kappa+1, \mu}}{\partial x}(tx, ty) \right\} \end{aligned} \right\} dt$$

Il en résulte par une loi élémentaire des modules

$$(42) \quad \left| \frac{\partial z_{\kappa, \mu+1}}{\partial x}(x, y) - P_{\kappa}[x, y; z_{\kappa, \mu+1}(x, y), z_{\kappa+1, \mu+1}(x, y)] \right|$$

$$< A | z_{\kappa, \mu+1}(x, y) - z_{\kappa, \mu}(x, y) | + A | z_{\kappa+1, \mu+1}(x, y) - z_{\kappa+1, \mu}(x, y) |$$

$$+ | y | \int_0^1 t \left\{ \begin{aligned} & A | Q_{\kappa}[tx, ty; z_{\kappa, \mu}(tx, ty), z_{\kappa+1, \mu}(tx, ty)] - \frac{\partial z_{\kappa, \mu}}{\partial y}(tx, ty) | \\ & + A | P_{\kappa}[tx, ty; z_{\kappa, \mu}(tx, ty), z_{\kappa+1, \mu}(tx, ty)] - \frac{\partial z_{\kappa, \mu}}{\partial x}(tx, ty) | \\ & + A | Q_{\kappa+1}[tx, ty; z_{\kappa, \mu}(tx, ty), z_{\kappa+1, \mu}(tx, ty)] - \frac{\partial z_{\kappa+1, \mu}}{\partial y}(tx, ty) | \\ & + A | P_{\kappa+1}[tx, ty; z_{\kappa, \mu}(tx, ty), z_{\kappa+1, \mu}(tx, ty)] - \frac{\partial z_{\kappa+1, \mu}}{\partial x}(tx, ty) | \end{aligned} \right\} dt$$

On établit de même la formule

$$(43) \quad \left| \frac{\partial z_{\kappa, \mu+1}}{\partial y}(x, y) - Q_{\kappa}[x, y; z_{\kappa, \mu+1}(x, y), z_{\kappa+1, \mu+1}(x, y)] \right|$$

$$< A | z_{\kappa, \mu+1}(x, y) - z_{\kappa, \mu}(x, y) | + A | z_{\kappa+1, \mu+1}(x, y) - z_{\kappa+1, \mu}(x, y) |$$

$$+ | x | \int_0^1 t \left\{ \begin{aligned} & A | Q_{\kappa}[t, x, \dots, z_{\kappa+1, \mu}(tx, ty)] - \frac{\partial z_{\kappa, \mu}}{\partial y}(tx, ty) | \\ & + A | P_{\kappa}[tx, \dots, z_{\kappa+1, \mu}(tx, ty)] - \frac{\partial z_{\kappa, \mu}}{\partial x}(tx, ty) | \\ & + A | Q_{\kappa+1}[tx, \dots, z_{\kappa+1, \mu}(tx, ty)] - \frac{\partial z_{\kappa+1, \mu}}{\partial y}(tx, ty) | \\ & + A | P_{\kappa+1}[tx, \dots, z_{\kappa+1, \mu}(tx, ty)] - \frac{\partial z_{\kappa+1, \mu}}{\partial x}(tx, ty) | \end{aligned} \right\} dt$$

En additionnant membres à membres les formules (42) et (43), il vient

$$(44) \quad \left| \frac{\partial z_{\kappa, \mu+1}}{\partial x}(x, y) - P_{\kappa}[x, y; z_{\kappa, \mu+1}(x, y), z_{\kappa+1, \mu+1}(x, y)] \right|$$

$$+ \left| \frac{\partial z_{\kappa, \mu+1}}{\partial y}(x, y) - Q_{\kappa}[x, y; z_{\kappa, \mu+1}(x, y), z_{\kappa+1, \mu+1}(x, y)] \right|$$

$$\begin{aligned}
 &< 2A \left\{ |z_{\kappa, \mu+1}(x, y) - z_{\kappa, \mu}(x, y)| + |z_{\kappa+1, \mu+1}(x, y) - z_{\kappa+1, \mu}(x, y)| \right. \\
 &+ |x| + |y| \left. \int_0^1 2At \left\{ \begin{aligned} &|Q_{\kappa}[tx, \dots, z_{\kappa+1, \mu}(tx, ty)] - \frac{\partial z_{\kappa, \mu}}{\partial y}(tx, ty)| \\ &+ |P_{\kappa}[tx, \dots, z_{\kappa+1, \mu}(tx, ty)] - \frac{\partial z_{\kappa, \mu}}{\partial x}(tx, ty)| \\ &+ |Q_{\kappa+1}[tx, \dots, z_{\kappa+1, \mu}(tx, ty)] - \frac{\partial z_{\kappa+1, \mu}}{\partial y}(tx, ty)| \\ &+ |P_{\kappa+1}[tx, \dots, z_{\kappa+1, \mu}(tx, ty)] - \frac{\partial z_{\kappa+1, \mu}}{\partial x}(tx, ty)| \end{aligned} \right\} dt \right.
 \end{aligned}$$

En appliquant la formule successivement pour $\mu = 0, 1, 2, \dots$ on en déduit de proche en proche que

$$\begin{aligned}
 (45) \quad &\left| \frac{\partial z_{\kappa, \mu+1}}{\partial x}(x, y) - P_{\kappa}[x, y; z_{\kappa, \mu+1}(x, y), z_{\kappa+1, \mu+1}(x, y)] \right| \\
 &+ \left| \frac{\partial z_{\kappa, \mu+1}}{\partial y}(x, y) - Q_{\kappa}[x, y; z_{\kappa, \mu+1}(x, y), z_{\kappa+1, \mu+1}(x, y)] \right| \\
 &< M \cdot \frac{4^{\mu+1} \cdot (2A)^{\mu+1}}{(\mu+1)!} \cdot (|x| + |y|)^{\mu+1}
 \end{aligned}$$

Il en résulte que les suites (30) sont uniformément convergentes et que

$$(46) \quad \left\{ \begin{aligned} \lim_{\mu \rightarrow \infty} \frac{\partial z_{\kappa, \mu}}{\partial x}(x, y) &= \frac{\partial z_{\kappa, \infty}}{\partial x}(x, y) = P_{\kappa}[x, y, z_{\kappa, \infty}(x, y), z_{\kappa+1, \infty}(x, y)] \\ \lim_{\mu \rightarrow \infty} \frac{\partial z_{\kappa, \mu}}{\partial y}(x, y) &= \frac{\partial z_{\kappa, \infty}}{\partial y}(x, y) = Q_{\kappa}[x, y, z_{\kappa, \infty}(x, y), z_{\kappa+1, \infty}(x, y)] \end{aligned} \right.$$

Ainsi, les fonctions $z_{\kappa, \infty}(x, y)$, $z_{\kappa+1, \infty}(x, y)$ constituent un système de solutions des équations récurrentes aux différentielles totales proposées, satisfaisant aux conditions initiales indiquées. On démontre comme dans la théorie des équations différentielles ou comme dans l'étude de M. Nikliborc qu'il n'y a pas d'autres solutions continues satisfaisant aux mêmes conditions initiales.

Saive, 19 avril 1950.

Sur la différentielle totale

PAR

Ch. J. de LA VALLÉE POUSSIN

1. Soit $F(x, y)$ une fonction continue et différentiable de x et de y . Sa différentielle totale est de la forme

$$(1) \quad d.F(x, y) = P(x, y) dx + Q(x, y) dy,$$

où $P = F'_x$ et $Q = F'_y$. Si les dérivées partielles $\frac{\partial P}{\partial y}$ et $\frac{\partial Q}{\partial x}$ sont déterminées et continues, elles sont nécessairement égales, car elles représentent respectivement F''_{xy} et F''_{yx} et que l'ordre de dérivation est indifférent en vertu de la continuité. On a donc, dans ce cas,

$$(2) \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Si l'on assigne une expression différentielle $Pdx + Qdy$, la condition (2) (où l'on suppose les deux dérivées continues) est donc *nécessaire* pour que l'expression soit une différentielle exacte. Elle est aussi *suffisante*, car l'intégrale $F(x, y)$ se détermine par la formule classique

$$(3) \quad F(x, y) = \int_a^x P(x, y) dx + \int Q(a, y) dy$$

On vérifie, en effet, moyennant la formule (2), que $F'_x = P$ et $F'_y = Q$.

2. Supposons encore que la fonction $F(x, y)$ admette une différentielle totale exprimée par la formule (1), mais que les conditions d'existence et de continuité imposées ci-dessus à $\frac{\partial P}{\partial y}$ et $\frac{\partial Q}{\partial x}$ soient mises en défaut. La détermination de $F(x, y)$ par la formule (3) n'est plus établie. Nous allons montrer que la formule subsiste en ne supposant que la continuité de P et de Q .

Remplaçons la fonction $F(x, y)$ par la fonction

$$F_1(x, y) = \int_b^y F(x, y) dy.$$

Nous aurons

$$(4) \quad d.F_1(x, y) = P_1(x, y) dx + Q_1(x, y) dy,$$

où P_1 et Q_1 ont pour expressions

$$(5) \quad P_1 = \frac{\partial F_1}{\partial x} = \int_b^y F'_x(x, y) dy, \quad Q_1 = \frac{\partial F_1}{\partial y} = F(x, y).$$

On tire de là

$$(6) \quad \frac{\partial P_1}{\partial y} = F'_x(x, y) = P, \quad \frac{\partial Q_1}{\partial x} = F'_x(x, y) = P.$$

Ces deux dérivées partielles sont continues et égales. La formule (3) s'applique à F_1 , car les conditions du n° précédent sont remplies. On a donc

$$F_1(x, y) = \int_a^x P_1(x, y) dx + \int Q_1(a, y) dy.$$

Il vient, en dérivant cette formule et utilisant (6) et (5),

$$F(x, y) = \frac{\partial F_1}{\partial y} = \int_a^x \frac{\partial P_1}{\partial y} dx + Q_1(a, y) = \int_a^x P(x, y) dx + F(a, y)$$

$$F(x, y) = \int_a^x P(x, y) dx + \int Q(a, y) dy.$$

C'est la formule (3).

3. Soit donnée l'expression différentielle

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

où l'on suppose seulement la continuité de P et de Q comme dans le n° précédent. La condition nécessaire et suffisante pour que ce soit la différentielle totale d'une fonction $F(x, y)$ est que l'on ait identiquement

$$\int_a^x P(x, y)dx + \int Q(a, y)dy = \int_b^y Q(x, y)dy + \int P(x, b)dx.$$

Cette condition est nécessaire, car $F(x, y)$ doit s'exprimer par l'une et l'autre des deux expressions précédentes (y pouvant jouer le même rôle que x). Cette condition est aussi suffisante, car $F(x, y)$ étant exprimée par l'une et l'autre expression, on trouve $\frac{\partial F}{\partial x} = P$

en dérivant la première, et $\frac{\partial F}{\partial y} = Q$ en dérivant la seconde. On vérifie ainsi que $F(x, y)$ est l'intégrale de l'expression différentielle proposée.

Sciences Physiques et Chimiques

La Section constitue au bureau pour 1950-1951 :

Président : M. J. M. DELFOSSE

Vice-Président : M. G. GUÉBEN

Secrétaire : M. Ch. MANNEBACK

Application des méthodes de la mécanique céleste au problème de Störmer

PAR

G. LEMAITRE

Dans une première note sur ce sujet ⁽¹⁾, nous avons transformé l'hamiltonien du problème de Störmer, c'est-à-dire du mouvement d'une particule électrisée dans le champ magnétique d'un dipôle, en donnant à cet hamiltonien une forme trigonométrique analogue à celle qui se présente dans les problèmes de mécanique céleste.

L'« orbite intermédiaire », au sens où ce mot est employé en mécanique céleste, est une orbite où la distance au dipôle r ne varie pas, et nous avons envisagé deux variantes : une première où cette orbite intermédiaire est une simple oscillation harmonique, et une seconde variante où l'orbite intermédiaire s'exprime au moyen des fonctions elliptiques et est l'orbite qu'on obtient en introduisant la condition : r constant, comme une sorte de « contrainte » dans l'hamiltonien du problème primitif.

Nous allons reprendre ici et développer la première variante en y introduisant une modification.

L'hamiltonien du problème de Störmer (1, 24) peut s'écrire

$$(1) \quad 2H \equiv u^2 U^2 - \frac{a}{u^2} - 2u + u^2 + (1 - s^2) p_s^2 + \frac{1}{1 - s^2} - s^2 u^2$$

nous y avons pris comme variable

$$u = 1/r$$

inverse de la distance r au dipôle, U est le moment conjugué à u . s est le sinus de la latitude, p_s est le moment conjugué à s ;

$$a = 1/16\gamma^4$$

comme précédemment.

⁽¹⁾ *Annales de la Société scientifique de Bruxelles* 1949, p. 83, désigné ici par I.

Rappelons encore que la variable principale est désignée par σ , elle remplace le temps t suivant la relation

$$dt = m r^2 d\sigma$$

Dans I, nous avons introduit du lieu de s et p_s des variables cano-
niquement conjuguées y Y par une transformation canonique. Si nous écrivons

$$(2) \quad s = \frac{2\sqrt{\eta}}{1+\eta} \sin y$$

et

$$(3) \quad p_s = \omega \frac{(1+\eta)^2}{1-\eta} \frac{2\sqrt{\eta} \cos y}{1+\eta^2 + 2\eta \cos 2y}$$

on trouve en effet que

$$(4) \quad p_s ds - Y dy = \omega dS_1$$

est bien une différentielle exacte, en fait

$$(5) \quad S_1 = y - \arctan \frac{1-\eta}{1+\eta} \tan y = -\sum \frac{1}{j} (-\eta)^j \sin 2jy$$

Si S_1 est exprimé par (2) au moyen de y et de s , on peut le considérer comme étant la fonction déterminante de la transformation canonique

$$(6) \quad p_s = \omega \frac{\partial S_1}{\partial s}, \quad Y = \omega \frac{2\eta}{1-\eta} = -\omega \frac{\partial S_1}{\partial y}$$

Lorsque, comme en I, ω est supposé dépendre des autres variables u , U , la transformation que nous venons d'écrire doit être étendue à ces autres variables. Dans I, nous avons choisi

$$\omega^2 = 1 - \frac{1}{r^2} = 1 - u^2$$

nous préférons ici laisser ω constant ou le faire varier d'une autre façon en fonction de variables que nous allons définir.

Les résultats que nous venons d'énoncer peuvent se vérifier aisément directement, ils résultent aussi avec quelques changements dans les notations de I (formules 28 et suivantes).

Nous allons maintenant compléter notre transformation cano-

nique en introduisant comme nouvelles variables, en outre de y et Y , les variables canoniquement conjuguées, v et V .

Nous introduisons une fonction déterminante S que nous supposons exprimée en fonction de s , U , v et y suivant l'équation

$$(7) \quad p_s ds + U du - V dv - Y dy = d(uU) - dS$$

nous aurons donc

$$(8) \quad \begin{aligned} p_s &= -\frac{\partial S}{\partial s} & Y &= \frac{\partial S}{\partial y} \\ u &= \frac{\partial S}{\partial U} & V &= \frac{\partial S}{\partial v} \end{aligned}$$

et nous choisissons

$$(9) \quad S = Uv - \omega S_1 + 2 \sum \lambda_j \sin 2jy + 2 \sum \mu_j \cos 2jy$$

Dans cette expression les λ et μ peuvent être des fonctions de v et de U . S_1 est la fonction déterminante employée il y a un instant et elle est supposée exprimée comme précédemment au moyen de s et de y , ω peut être une simple constante; mais peut aussi être fonction de v et de U .

On obtient ainsi

$$(10) \quad Y = \omega \frac{2\eta}{1 - \eta} + 2 \sum 2j \lambda_j \cos 2jy - 2 \sum 2j \mu_j \sin 2jy$$

et

$$(11) \quad \begin{aligned} u &= v + 2 \sum \frac{\partial \lambda_j}{\partial U} \sin 2jy + 2 \sum \frac{\partial \mu_j}{\partial U} \cos 2jy - \frac{\partial \omega}{\partial U} S_1 \\ U &= V - 2 \sum \frac{\partial \lambda_j}{\partial v} \sin 2jy - 2 \sum \frac{\partial \mu_j}{\partial v} \cos 2jy + \frac{\partial \omega}{\partial v} S_1 \end{aligned}$$

En substituant dans l'hamiltonien, on obtient un développement de la forme

$$(12) \quad H = H_0 + H_1 \cos 2y + H_2 \cos 4y + \dots$$

S'il est possible de choisir les fonctions λ et μ de telle façon que les H_1 H_2 ... s'annulent identiquement en v et V , mais pour une valeur particulière Y_0 de Y , ou ce qui revient au même une valeur η_0 de η ; alors si Y ou η ont initialement cette valeur Y_0 ou η_0 ils

garderont cette valeur au cours du mouvement, puisqu'on aura pour cette valeur

$$(13) \quad \frac{dY}{d\sigma} = \frac{\partial H}{\partial y} = 0$$

et, en outre, toujours pour cette valeur de Y , les équations canoniques relatives aux variables v et V se réduiront à

$$(14) \quad \frac{dv}{d\sigma} = \frac{\partial H_0}{\partial V} \quad \frac{dV}{d\sigma} = -\frac{\partial H_0}{\partial v}$$

c'est-à-dire aux équations canoniques relatives à un hamiltonien H_0 qui ne contient plus de termes en y .

On aura ainsi effectué une sorte de séparation des variables, et on pourra commencer l'étude du problème par celle de l'hamiltonien H_0 à un seul degré de liberté.

Quand ce problème sera résolu, on pourra obtenir la relation entre σ et y par l'équation canonique

$$\frac{dy}{d\sigma} = \frac{\partial H}{\partial Y}$$

qui, elle, conservera des termes trigonométriques.

Si on se borne à l'étude des trajectoires périodiques, c'est-à-dire si on cherche des solutions pour lesquelles v et V sont constants, ($V = 0$) on peut se contenter de poser

$$\lambda_j = l_j (v - v_0) + n_j, \mu_j = m_j U$$

où l_j , m_j et n_j sont des constantes, et il suffira que les H_j s'annulent ainsi que leurs dérivées premières en v et V pour les valeurs constantes de v et de V .

Il doit naturellement en être de même maintenant pour H_0 .

On aura donc à développer l'hamiltonien pour

$$(15) \quad \begin{aligned} u &= v + 2 \sum m_j \cos 2jy \\ U &= V - 2 \sum l_j \sin 2jy \end{aligned}$$

tandis que Y sera

$$(16) \quad \begin{aligned} Y &= \omega \frac{2\eta}{1 - \eta} + 2(v - v_0) \sum 2j l_j \cos 2jy - 2V \sum 2j m_j \sin 2jy \\ &\quad + 2 \sum 2jn_j \cos 2jy + 4 \sum l_k \sin 2ky \sum 2j m_j \sin 2jy \end{aligned}$$

Développement de l'hamiltonien :

Nous pouvons tout d'abord écrire l'hamiltonien sous la forme

$$(17) \quad 2H \equiv u^2 U^2 - \frac{a}{u^2} - 2u + u^2 + \omega^2 \left(\frac{1+\eta}{1-\eta} \right)^2 + \frac{(1-\omega^2)(1+\eta)^2}{1+\eta^2+2\eta\cos 2y} - \frac{4\eta u^2}{(1+\eta)^2} \sin^2 y = 0$$

Nous écrivons pour abréger

$$(18) \quad A = \frac{\eta}{(1+\eta)^2}, B = \left(\frac{1+\eta}{1-\eta} \right)^2, C = \frac{1+\eta}{1-\eta}, D = C\eta, E = C\eta^2$$

et nous obtiendrons le développement trigonométrique de l'hamiltonien; les calculs sont les mêmes que pour I (43) et utilisent en particulier I (33)

$$(19) \quad 2H = u^2 U^2 - \frac{a}{u^2} - 2u + u^2 + \omega^2 B - 2u^2 A (1 - \cos 2y) + (1 - \omega^2) [C - 2D \cos 2y + 2E \cos 4y \dots]$$

Si on y porte les développements de u et de U , on obtient en se bornant au quatrième ordre (l_j, m_j et n_j étant considérés comme d'ordre j)

$$(20) \quad \begin{aligned} 2H = & -a [v^{-2} + 6v^{-4} m_1^2 + 6v^{-4} m_2^2 - 12v^{-5} m_1^2 m_2 \\ & + 2 \cos 2y (-2v^{-3} m_1 + 6v^{-4} m_1 m_2 - 12v^{-5} m_1^3) \\ & + 2 \cos 4y (-2v^{-3} m_2 + 3v^{-4} m_1^2 + 6v^{-4} m_1 m_3 - 24v^{-5} m_1^2 m_2 + 20v^{-6} m_1^4) \\ & + 2 \cos 6y (-2v^{-3} m_3 + 6v^{-4} m_1 m_2 - 4v^{-5} m_1^3) \\ & + 2 \cos 8y (-2v^{-3} m_4 + 3v^{-4} m_2^2 + 6v^{-4} m_1 m_3 - 12v^{-5} m_1^2 m_2 + 5v^{-6} m_1^4)] \\ & + [1 - 2A(1 - \cos 2y) + (V - 2\Sigma l_j \sin 2jy)^2] \\ & \times [v^2 + 2m_1^2 + 2m_2^2 \\ & + 2 \cos 2y (2v m_1 + 2m_1 m_2) \\ & + 2 \cos 4y (2v m_2 + m_1^2 + 2m_1 m_3) \\ & + 2 \cos 6y (2v m_3 + 2m_1 m_2) \\ & + 2 \cos 8y (2v m_4 + m_2^2 + 2m_1 m_3) \dots] \\ & - 2v - 2 \Sigma_j m_j \cos 2jy \\ & + \omega^2 B + (1 - \omega^2) [C - 2D \cos 2y + 2E \cos 4y - 2F \cos 6y \dots] \end{aligned}$$

Dans ce développement les quantités A, B C D E ... sont des fonctions de η qui doivent être développées en fonctions de Y et de $(v - v_0)$ et V d'après (16).

Pour faire ces développements on trouvera peut-être avantageux de développer ces quantités en séries de η , ou encore en série d'une quantité reliée à η par la relation suivante

$$(21) \quad e = \frac{\eta}{1 - \eta}$$

Voici quelques-uns de ces développements qui pourront être utiles

$$\begin{aligned} A &= -\Sigma j(-\eta)^j = \frac{e + e^2}{(1 + 2e)^2} = \frac{1}{4} [1 - \frac{1}{2e} \Sigma j(-2e)^j] \\ (22) \quad B &= 1 + 4 \Sigma j \eta^j = 1 + 4e + 4e^2 \\ C &= 1 + 2 \Sigma \eta_j = 1 + 2e \\ D &= \frac{e}{1 + e} \quad C = e [1 - \Sigma_j (-e)^j] \\ E &= \frac{e^2}{(1 + e)^2} \quad C = e^2 [1 + \Sigma(2 - j)(-e)^j] \end{aligned}$$

Si on se borne aux termes du premier ordre en $l_1 m_1 n_1$ on a seulement

$$\begin{aligned} 2H &= -a (v^{-2} - 2 v^{-3} m_1 \cdot 2 \cos 2y) \\ &+ [1 - 2A(1 - \cos 2y) + V^2 - 4 V l_1 \sin 2y] [v^2 + 2vm_1 \cdot 2 \cos 2y] \\ &\quad - 2 v - 2 m_1 \cos 2y \\ (23) \quad &+ \omega^2 B + (1 - \omega^2) (C - 2D \cos 2y + 2E \cos 4y \dots) \\ &+ [\omega^2 B' + (1 - \omega^2) (C' - 2D' \cos 2y + 2E' \cos 4y \dots) \\ &\quad - 2A' v^2 (1 - \cos 2y)] \\ &\times \} - 4 [n_1 + (v - v_0)l_1] \cos 2y + 4 V m_1 \sin 2y \} \end{aligned}$$

en ajoutant à cette expression sa dérivée par rapport à v multipliée par $(v - v_0)$, nous pourrions remplacer v par la constante v_0 .

Cette expression doit s'annuler identiquement, c'est-à-dire suivant notre programme en négligeant V^2 .

Les accents désignent des dérivées par rapport à η multipliées par $\frac{1 - \eta^2}{2\omega}$.

On a

$$(24) \quad \begin{aligned} 2\omega A' &= \left(\frac{1 - \eta}{1 + \eta}\right)^3, \quad 2\omega B' = 4\frac{1 + \eta}{1 - \eta}, \quad 2\omega C' = 2 \\ 2\omega D' &= 1 + 2\eta - \eta^2, \quad 2\omega E' = 2\eta + 2\eta^2 - 2\eta^3 \dots \end{aligned}$$

Il reste à choisir ω ; ce choix est en principe arbitraire, mais il conditionne la définition de γ et influe sur la convergence des développements. Nous supposons ω constant et défini par

$$(25) \quad 1 - \omega^2 = v^2 \frac{A'}{D'} = v^2 \frac{(1 - \eta)^3}{(1 + 2\eta - \eta^2)(1 + \eta)^3}$$

De la sorte les cinq conditions qui doivent être satisfaites sont, pour les termes en $2V \sin 2\gamma$

$$(26) \quad l_1 = \frac{m_1}{2\omega v^2} \left[4\omega^2 \frac{1 + \eta}{1 - \eta} + (1 - \omega^2)(-6\eta + 2\eta^3) \right]$$

pour les termes en $2(v - v_o) \cos 2\gamma$

$$(27) \quad \frac{1}{2\omega} \left[4\omega^2 \frac{1 + \eta}{1 - \eta} + (1 - \omega^2)(-2\eta + 4\eta^2 - 2\eta^3) \right] l_1 = \\ = (1 - 2A - 3av^{-4}) m_1 + vA$$

pour ceux en $2(v - v_o)$

$$(28) \quad av^{-3} + (1 - 2A)v - 1 + 2Am_1 = 0$$

Enfin les termes non trigonométriques pour $v = v_o$ et $V = 0$

$$(29) \quad -av^{-2} + (1 - 2A)v^2 + 4Avm_1 - 2v + \omega^2 B + (1 - \omega^2)C = 0$$

et ceux en $2 \cos 2\gamma$

$$(30) \quad \begin{aligned} 2av^{-3} m_1 + Av^2 - (1 - \omega^2)D + (1 - 2A)2vm_1 - m_1 \\ - \frac{1}{\omega} \left[4\omega^2 \frac{1 + \eta}{1 - \eta} + (1 - \omega^2)(-2\eta + 4\eta^2 - 2\eta^3) \right] n_1 = 0 \end{aligned}$$

Il est facile de voir que ceci fournit bien le nombre d'équations requises pour déterminer les six quantités

$\eta, l_1, m_1, n_1, a, v$ en fonction de l'une d'entre elles.

Contributions à la théorie des effets de latitude et d'asymétrie des rayons cosmiques

La pénombre au voisinage de l'équateur

PAR

René DE VOGELAERE

(Note présentée par M. le Chanoine G. Lemaître)

INTRODUCTION

Ce travail a pour but de corriger une erreur qui nous est apparue dans la contribution de Tchang Yong-Li à la théorie des « Cônes des rayons cosmiques infiniment voisins de l'équateur » (*Ann. Soc. Sc. Brux.*, A LIX, 285-300 (1939)).

L'erreur était de croire que pour une latitude donnée, une petite variation de l'énergie correspond à une grande variation de la quantité $\log \alpha$ et que « la réalité physique correspond à une superposition des bandes pour toute la gamme des valeurs de α comprise entre

$$k\pi < -\sqrt{\frac{3}{2}} \text{Log } \alpha < (k+1)\pi \quad (\text{p. 296}).$$

Il n'en est rien, car la variation de α est d'ordre supérieur par rapport à la variation de l'énergie et il y a simplement un déplacement des bandes de pénombre.

La correction de l'erreur met en évidence un phénomène très important : pour une énergie donnée, *la forme des cônes varie périodiquement* si on s'éloigne de l'équateur géomagnétique et, en première approximation, ces cônes seront semblables pour toutes les latitudes dont le rapport est une puissance de 3,6058.

D'autre part, les considérations du N° 4, p. 297, sont faussées par une double erreur :

1° on n'y a pas considéré que x dépend aussi de α qui est du même ordre de grandeur que ρ .

2° la quantité ρ correspond au point d'arrivée sur la terre de la trajectoire dont les caractéristiques d'amplitude et de phase sont alors β_2 et ζ_2 ; ce sont ces quantités qu'il aurait fallu mettre dans la formule (29) p. 298, à la place des β_0 et ζ_0 .

A supprimer dans le travail de Tchang Yong-Li

Les figures 4 à 6 et les paragraphes suivants :

p. 296 Quand α varie ... jusqu'à ... — $\sqrt{\frac{3}{2}}$ $\text{Log } \alpha = k\pi$.

p. 297 Pour l'énergie ... jusqu'à ... cône principal.

p. 299 Les lignes d'égale phase ... jusqu'à la fin de l'article p. 300.

ERRATUM

Signalons d'abord les erreurs typographiques suivantes :

p. 288 15^e ligne où $\omega = \sqrt{\frac{3}{4}}$

p. 288 19^e » (5) $\lambda = \beta A(\sigma) \sin [\omega + \varphi_0 + a(\sigma)]$

p. 290 11^e » (6) ... = — $a(0)$ — $\chi + \zeta$

p. 292 25^e » (9) $\varphi_2 = \pi - \varphi_1 - \sqrt{\frac{3}{2}} \log \frac{3\beta_1^2 - \alpha}{64}$

p. 294 21^e » L'équation (18) s'écrit ...

R. Scohier a aussi fait remarquer dans sa thèse de licence que les verticales de la figure 3 ont été calculées avec la formule fausse

$$\frac{x + X}{X} = \frac{\tan 2\chi}{\tan (\zeta - \chi)}$$

au lieu de la formule exacte (24), cette erreur est sans importance puisqu'elle tombe dans la partie fautive de l'article.

Pour montrer que c'est bien la formule (9) ci-dessus qui est exacte,

il suffit de remarquer qu'au voisinage du sol les solutions sont

$$\eta_1 = \beta_1 \sin (\omega \sigma + \varphi_1)$$

et

$$\eta_2 = \beta_2 \sin (\omega \sigma + \varphi_2);$$

pour exprimer qu'elles se raccordent, il faut écrire que lorsque $\sigma = \sigma_{m1}$ pour la première et $\sigma = \sigma_{m2}$ pour la seconde :

$$\eta_1 = \eta_2 \quad \text{et} \quad \eta'_1 = -\eta'_2$$

on en déduit $\beta_1 = \beta_2$ donc $\sigma_{m1} = \sigma_{m2} = \sigma_m$

et $2\omega\sigma_m + \varphi_1 + \varphi_2 = \pi$.

Nous écrirons aussi la formule équivalente à (9)

$$(9') \quad \zeta_2 = \pi - \zeta_1 + 2\chi + 2a(0) - \sqrt{\frac{3}{2}} \log \frac{3\beta^2 - \alpha}{64}.$$

Correction

Nous remplacerons les lignes supprimées par les développements suivants, qui peuvent être logiquement placés à la fin de l'article en question.

Théorie du cône d'ordre un

Toute trajectoire asymptotique à une orbite périodique de la famille principale et qui ne rencontre la terre qu'après s'être déjà rapprochée d'elle une fois, donne lieu au cône de pénombre d'ordre un.

Une telle trajectoire avait, lorsqu'elle se rapprochait la première fois de la terre, une amplitude $\beta_0 = \sqrt{\frac{3}{2}}$ et une phase ζ_0 ; lorsqu'elle s'en est éloignée, ces caractéristiques sont devenues β_1 et ζ_1 données par les formules (7); au nouveau retour ce seront β_2 et ζ_2 données par (9') ci-dessus et, comme nous supposons que cette fois la terre est atteinte, le ζ de la formule (24) est ce ζ_2 . Si on tient compte de (17) : $3\beta_1^2 = \alpha_1$, on peut remplacer (7) par (8).

On déduit des équations (10) et (20) et de la valeur de y_s , la relation

$$y_1 = y - y_s = \frac{2(1 - \gamma_1)}{r \cos \lambda} = \frac{\alpha}{2r \cos \lambda};$$

comme on commet une erreur d'ordre supérieur en y posant $r = r_0$ et $\lambda = 0$, α ne dépend pratiquement pas de r et de λ , c'est-à-dire de l'énergie et de la latitude.

En remplaçant α par sa valeur $2r_o y_1$ dans (9), on pourra écrire à cause de (17)

$$(31) \quad \zeta_2 = \pi - \zeta_1 - \sqrt{\frac{3}{2}} \log \left[\frac{1}{64} (\Phi - 1) 2r_o y_1 \right] + 2a(0) + 2\chi.$$

Si on écrit (8) sous la forme

$$(32) \quad \cos 2\zeta_1 = \frac{\cot^2 \chi + \tan^2 \chi - 2/\Phi}{\cot^2 \chi - \tan^2 \chi}$$

les cônes s'obtiendront en éliminant ζ_1 , ζ_2 et Φ entre les relations (31) et (32), (23) et (24); ces deux dernières pouvant s'écrire avec

$$x = \bar{x}\lambda, y_1 = \bar{y}_1\lambda^2, X = \bar{X}\lambda, Y = \bar{Y}\frac{\lambda^2}{\Phi} \text{ et } P = \bar{P}\Phi$$

$$(33) \quad (\bar{x} - \bar{X})^2 = 2\bar{P}(\bar{y}_1\Phi - \bar{Y})$$

$$(34) \quad \frac{\bar{x} - \bar{X}}{\bar{X}} = \frac{\tan 2\chi}{\tan (\zeta_2 - \chi)}$$

Au moyen des valeurs de $\tan 2\zeta$ du haut de la p. 290 et de X , Y et P du haut de la p. 295, on peut déduire

$$(33') \quad \frac{\bar{x} - \bar{X}}{\bar{X} \tan 2\chi} = \pm \sqrt{\frac{2\bar{P}(\bar{y}_1\Phi - \bar{Y})}{\bar{X}^2 \tan^2 2\chi}} = \pm \sqrt{\frac{\bar{y}_1\Phi - \bar{Y}}{\bar{Y}}}$$

Si on pose alors

$$z = -\zeta_2 + \chi - \sqrt{\frac{3}{2}} \text{Log } \bar{y}_1\Phi$$

on pourra écrire au lieu de (31) et de (33') et (34) à $k\pi$ près :

$$z = \zeta_1 + \chi + \sqrt{\frac{3}{2}} \text{Log} \left[\frac{1}{64} \frac{(\Phi - 1)}{\Phi} 2r_o \lambda^2 \right] - 2a(0) - 2\chi$$

$$z = - \left[\sqrt{\frac{3}{2}} \text{Log } \bar{y}_1\Phi \pm \arctan \frac{\bar{Y}}{\bar{y}_1\Phi - \bar{Y}} \right]$$

Ces formules deviennent numériquement

$$(35) \quad \cos 2\zeta_1 = 1.00175 - 0.059209 \frac{1}{\Phi}$$

$$(36) \quad z = -3.27776 + 2.82007 \log_{10} \lambda^2 + 2.82007 \log \left(1 - \frac{1}{\Phi} \right) + \zeta_1$$

$$(37) \quad z = -2.82007 \log (\bar{y}_1 \Phi) \pm \arctan \sqrt{\frac{0.81343}{y_1 \Phi - 0.81343}}$$

car $\bar{Y} = 0.81343$, $\bar{X} = 2.64949$, $r_o = 0.41421$, $a(0) = -1.10832$,
 $\chi = 0.17032$, $\tan^2 \chi = 0.029579$ et $\cot^2 \chi = 33.808$

Calcul du cône d'ordre un à l'horizon

A chaque valeur de Φ correspondent par (35) deux valeurs de ζ_1 égales et de signe contraire donnant par (36) deux valeurs de z , que nous noterons respectivement z_+ et z_- ; si on porte chacune de ces valeurs dans les équations (37), que nous noterons z'_+ et z'_- , nous aurons en tout quatre infinités de solutions discrètes pour $\bar{y}_1 \Phi$, d'où l'on déduira \bar{y}_1 puis \bar{x} par la formule déduite de (33')

$$x = X (1 \pm \tan 2\chi \sqrt{\frac{y_1 \Phi}{Y} - 1}) = 2.6495 (1 \pm 0.3545 \sqrt{\frac{y_1 \Phi}{0.8134} - 1})$$

les signes \pm correspondants aux équations z'_+ et z'_- .

Dans le tableau I nous donnons quelques valeurs pour les fonctions $Z = z - 2.82007 \log \lambda^2$ et z' , qui sont toujours ramenées entre 0 et π ; tous les nombres sont à multiplier par 10^{-4} .

TABLEAU 1

$1/\Phi$	$\pm \zeta_1$	Z_+	Z_-	$\bar{y}_1 \Phi$	z'_-	z'_+
0295.8	0000	29687	29687	8134	18238	18238
1000	0457	29219	28305	8200	17240	19037
2000	0712	28033	26609	8400	16053	19634
3000	0897	26583	24789	8800	14486	20061
4000	1051	24850	22748	9200	13255	20203
5000	1177	22743	20389	9600	12193	20223
6000	1296	20129	17537	10000	11241	20175
7000	1404	16712	13904	12000	7440	19510
8000	1504	11846	8838	14000	4547	18627
9000	1598	3452	0256	16000	2182	17722
9500	1658	26438	23122	18000	173	16846
10000	1687	indéterminé		20000	29843	16011
				25000	26265	14123
				30000	23438	12484
				40000	19115	9761
				50000	15855	7555
				100000	6108	324

Nous en avons déduit comme exemple, la position des zones de pénombre d'ordre un pour les latitudes λ telles que

$$2.8201 \log \lambda^2 = -2.1360 + k\pi,$$

soit $\lambda = \dots, 0^{\circ}5110, 1^{\circ}843, 6^{\circ}644,$

Tout revient à résoudre (37) par rapport à $\bar{y}_1 \Phi$ connaissant $z' = Z + 2.82007 \log \lambda^2 = Z - 2.1360$; une première approximation est donnée par les courbes correspondant aux colonnes z' du tableau. Les valeurs plus précises se réduisant par approximations successives de la formule (37) mise sous la forme

$$(37') \quad \arcsin \sqrt{\frac{0.8134}{\bar{y}_1 \Phi}} - z = 5.6402 \log \sqrt{\bar{y}_1 \Phi}$$

Les résultats sont donnés dans le tableau II.

Si on observe à l'horizon, on déduit de l'équation (26), la valeur de μ_k qui représente l'énergie

$$(38) \quad \bar{x}^2 + 2\bar{y}_1 = 10.65684 + 13.65684 \mu_k$$

C'est ce que nous avons fait également dans le tableau II, les diverses solutions sont représentées à la figure 1 où l'on voit comment varie à l'horizon, la position des zones de pénombre avec l'énergie.

Calcul du cône d'ordre un en dehors de l'horizon

Si on projette l'intersection des cônes avec la sphère unité non plus, comme ci-dessus, sur le plan horizontal mais sur le plan méridien, le y' des formules (30) représente la distance au plan horizontal, donc $y' = \text{cte}$ est une observation à une distance zénithale constante et on a avec $y' = \bar{y}' \lambda$ et

$$y = y_1 + y_s = y_1 + (1 - y_h) :$$

$$y' = \frac{1}{\lambda} \sqrt{1 - \bar{x}^2 \lambda^2 - (1 - \bar{y}_k \lambda^2 + \bar{y}_1 \lambda^2)^2} = \sqrt{2(\bar{y}_k - \bar{y}_1) - \bar{\lambda}^2}$$

\bar{y}_k est le \bar{y}_1 de l'horizon dans le plan Est-Ouest et vaut donc (26)

$$2\bar{y}_k = 10.65684 + 13.65684 \mu$$

ce qui donne en utilisant aussi (38)

$$\bar{y}'^2 = 13.65684 (\mu - \mu_k)$$

La pénombre se présente donc de façon semblable pour les différentes hauteurs au-dessus de l'horizon, avec un simple décalage de l'origine des μ sur une parabole en \bar{y}' .

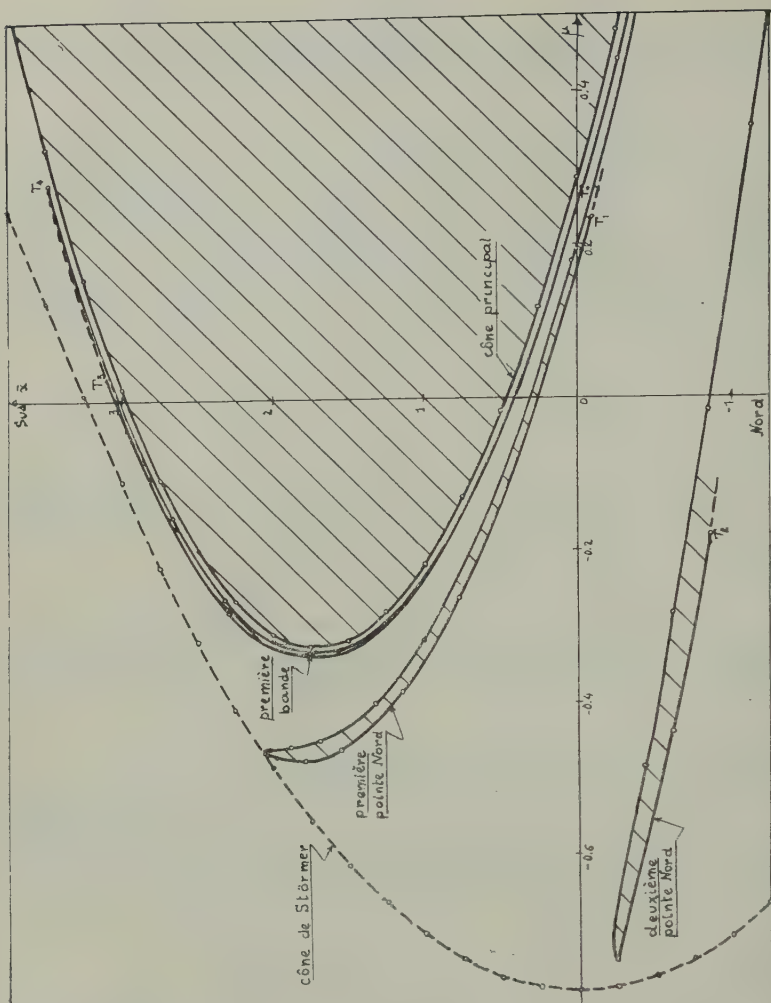


Fig. 1. — Cônes d'arrivée des rayons cosmiques, à l'horizon, pour les latitudes ... 0°51'10", 1°8'43", 6°6'44".

Trajectoires de seconde espèce.

Considérons les trajectoires qui atteignent la terre après s'être rapprochées une fois; si l'énergie des particules correspondantes est ρ ; il faut que le minimum de la trajectoire corresponde à une énergie $\rho_m \geq \rho$. ρ_m est lié au ξ de la formule (27) par

$$\log 2 + X(0) + \xi = \log 2 + X(0) + \log (1 + \rho_m)(1 - \alpha/4)$$

à cause de $e^x = 2\gamma_1 r = 2(1 - \alpha/4)r_0(1 + \rho_m)$

on a donc

$$(39) \quad \rho_m = \xi + \alpha/4.$$

D'autre part, si on appelle λ la latitude d'arrivée de la particule, on a $\rho = \mu\lambda^2$; si on pose $\rho_m = \mu_m\lambda^2$, il faudra donc

$$\mu_m \geq \mu$$

pour que la particule ne soit pas bloquée par la terre lors de son premier minimum, le cas d'égalité correspondant à des trajectoires de seconde espèce. Il nous reste à calculer μ_m :

La formule (28) donne numériquement avec $\eta = 2(\zeta_0 - \chi)$

$$0.58579\zeta = \beta_0^2(-0.26307 + 0.43149 \cos \eta + 0.47514 \sin \eta) - (\alpha/4) 0.17157$$

Ceci devient avec (39) et $\alpha = 2r_0\dot{y}_1\lambda^2$ et en posant $\beta_0^2 = \alpha\Phi_0/3$

$$(40) \quad \mu_m = \dot{y}_1 [\Phi_0(-0.12401 + 0.20340 \cos \eta + 0.22398 \sin \eta) + 0.14645]$$

Trajectoires de troisième espèce

La trajectoire sera de troisième espèce si elle part asymptotiquement à une orbite de la famille principale, alors $\Phi_0 = 1$ et

$$(41) \quad \mu_m/\dot{y}_1 = \kappa = 0.02244 + 0.20340 \cos \eta + 0.22398 \sin \eta$$

Il reste à déterminer η en éliminant ζ_1 de (7) et en faisant apparaître η , on obtient ainsi numériquement

$$(42) \quad 2\Phi = 33.838 - 31.838 \cos \eta + 11.285 \sin \eta$$

L'élimination de η nous donne les deux solutions

$$(43) \quad \kappa = 0.139526 - 0.0069206 \Phi \pm 0.0082616 \sqrt{1140.97 - (2\Phi - 33.838)^2}$$

Remarquons : le double signe correspond au fait que pour une valeur de Φ , il y a par (35) deux valeurs pour ζ_1 , qui donnent comme nous l'avons indiqué au Tableau II, respectivement le bord intérieur et le bord extérieur des pointes et bandes de pénombre; un essai établi la correspondance, il faut utiliser le signe plus pour le bord intérieur z_+ et le signe moins pour le bord extérieur z_- .

On obtient ainsi les colonnes des $\mu_m = \kappa\dot{y}_1$ du Tableau II. Comme il faut avoir la relation (40), seules les trajectoires dont la quantité μ_m a été soulignée n'ont pas été bloquées par la terre; on constate ainsi que les pointes Nord sont dans l'ombre à partir de la troisième, c'est la raison pour laquelle n'avons pas essayé de les représenter sur la figure 1. Les pointes Sud sont toutes dans l'ombre. Sur la première et deuxième pointe Nord il y a un point T_1 ou T_2 correspondant à une trajectoire de troisième espèce et situé sur le bord extérieur, à partir de ce point, ce bord doit être remplacé par une autre limite due à des trajectoires de seconde espèce que nous n'avons pas calculées. Ces points de troisième espèce correspondent à des

trajectoires doublement asymptotiques, c'est pourquoi ces points sont symétriques de points P_1 et P_2 appartenant à la limite du cône principal.

Nous avons aussi examiné la première bande de pénombre. Sur celle-ci, il y a un point de troisième espèce T_0 analogue à ceux que nous venons d'indiquer, mais il y en a aussi deux autres T_3 et T_4 sur chacun des bords du côté Sud, cela signifie donc que l'effet d'ombre de la terre coupe la bande de pénombre vers le Sud.

Nous avons fait plusieurs vérifications pour quelques trajectoires afin de contrôler ce travail.

Conclusion

Le travail de correction ci-dessus, donne la méthode de calcul de la pénombre d'ordre un, il montre que seules ce que nous avons appelé la première et deuxième pointe Nord ont une importance pratique, avec peut-être la première bande de pénombre, les autres bandes, situées entre la première et le cône principal devant être très fines.

Sans doute, les cônes d'ordre supérieur à un, dus à des trajectoires rencontrant la terre après plus d'un rebondissement, donnent lieu à des pointes intermédiaires très fines, nous n'avons pas fait ce calcul, nous limitant au programme de Tchang Yong-Li; elles ont probablement peu d'importance.

La comparaison avec le travail de Mrs Albagli Hunter ⁽¹⁾ nous indique que si on retrouve à 20° une partie du phénomène que nous venons de calculer pour des latitudes proches de l'équateur, la forme des régions de pénombre varie vite; sans doute serait-il utile de déterminer numériquement en se servant des résultats de notre travail comme première approximation, comment évolue la pénombre jusqu'à 20° ou au delà, et la raison d'existence de certaines régions indiquées sur la figure (6) de la référence ci-dessus.

Sans doute les asymptotiques à des familles d'orbites autres que la famille principale telle la famille d'ovales que nous avons déterminée dans notre thèse de doctorat ont un rôle à jouer dans cette explication.

Faculté des Sciences, Université Laval, Québec, Canada.

⁽¹⁾ R. ALBAGLI HUNTER. The penumbra at geomagnetic latitude 20° and the energy spectrum of primary cosmic radiation. *Phys. Rev.* 1939; LV, p 614-620.

Sur certains systèmes pancratiques

Note de M. A. BIOT

1. LE PROBLÈME. — Soient deux lentilles positives L_1 et L_2 , coaxées et deux plans parallèles P_1 et P_2 , situés en dehors des lentilles et perpendiculaires à leur axe commun. Il s'agit d'étudier la reproduction du plan P_1 sur le plan P_2 avec un grossissement variable obtenu en déplaçant L_1 et L_2 , ces lentilles toutefois ne pouvant pas traverser P_1 et P_2 .

Nous appelons

x_1, x'_1 les distances de L_1 au plan P_1 et à son image par rapport à L_1 ;

x_2, x'_2 les distances de L_2 aux plans objet et image relatifs à cette lentille;

d la distance comprise entre L_1 et L_2 ;

$2l$ la distance des plans P_1 et P_2 , imposée;

f_1, f_2 les distances focales de L_1 et L_2 ;

F, F_0 la distance focale de la combinaison respectivement pour d quelconque et pour $d = 0$;

g le grossissement.

Nous posons encore

$$\gamma = \frac{(g-1)^2}{g}, \quad \varepsilon = d - l, \quad \xi = x_1 + f_1.$$

Nous admettons la convention de signes habituelle, de sorte que la formule des lentilles s'écrit

$$\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f}$$

2. DISCUSSION GÉNÉRALE. — En raison de la convention de signes adoptée, g est toujours négatif dans le problème traité. Il en résulte que l'une des deux lentilles est rapprochée du plan P voisin d'une

distance plus petite que sa distance focale; l'autre au contraire est plus éloignée du plan P voisin que cette distance. Il en résulte deux dispositions possibles pour L_1 et L_2 , qui peuvent en principe occuper chacune les deux positions que nous venons de définir. Nous retrouverons dans les discussions qui suivront deux dispositions particulières

des lentilles dans lesquelles le grossissement vaut $\frac{f_1}{f_2}$; elles correspondent au cas où les plans P_1 et P_2 coïncident respectivement avec les plans focaux de L_1 et L_2 et au cas où le système L_1, L_2 est afocal. Remarquons encore qu'en retournant le système L_1, L_2 on peut obtenir la même gamme de grossissements que dans la position initiale.

La théorie doit donner en définitive la valeur de x_1 (ou de ξ_1) en fonction de g , ainsi que celle de d . Au point de vue de la réalisation mécanique il est désirable de choisir les caractéristiques $2l, f_1, f_2$ de manière que l'on puisse assurer — autant que possible — le guidage de l'une des lentilles par un moyen simple, par exemple le long d'une hélice régulière, le guidage de l'autre lentille seulement devant s'obtenir à l'aide d'une coulisse à réaliser par points.

Remarquons encore qu'il est nécessaire que les irrégularités inévitables dans les mouvements de L_1 et L_2 soient sans influence notable sur la reproduction de P_1 en P_2 .

Enfin, puisque l'on a

$$0 \leq d \leq 2l,$$

on a aussi

$$-l \leq \varepsilon \leq l$$

et, par différentiation

$$\delta d = \delta \xi$$

$$\delta x_1 = \delta \xi_1$$

3. — PREMIÈRE RELATION GÉNÉRALE. — Soient p et p' les distances aux plans P_1 et P_2 des plans principaux de la combinaison L_1, L_2 .

Dans cette combinaison la distance des plans principaux vaut

$$-\frac{Fd}{f_1} - \frac{Fd}{f_2} + d.$$

on peut donc écrire

$$-p + p' - \frac{Fd}{f_1} - \frac{Fd}{f_2} + d = 2l$$

Évaluons p et p' en fonction de g . Il vient

$$p = F \frac{1-g}{g} \quad p' = F(1-g)$$

Introduisons dans la relation précédente; on trouve facilement

$$F\gamma + dF\left(\frac{1}{F_0} - \frac{1}{F}\right) + 2l = 0$$

ou

$$\gamma + \frac{d^2}{f_1 f_2} + \frac{2l}{F} = 0,$$

relation que nous utiliserons sous la forme

$$\epsilon^2 + \gamma f_1 f_2 + 2l(f_1 + f_2) - l^2 = 0 \quad (1)$$

Telle est notre première relation générale.

4. — ÉTUDE DE γ . — A. On a

$$\gamma = \frac{(g-1)^2}{g}.$$

g étant toujours négatif dans le problème considéré, on a toujours également $\gamma < 0$. On voit facilement aussi que γ prend la même valeur pour $g = g_0$ et $g = \frac{1}{g_0}$. Enfin, dérivons γ par rapport à g :

$$\gamma' = \frac{g^2 - 1}{g}$$

γ est maximum pour $g = -1$ et prend pour cette valeur de g la valeur $\gamma = -4$. On a donc

$$-4 \geq \gamma \geq -\infty$$

De plus γ est croissant ou décroissant en même temps que g .

B. Le tableau ci-dessous donne la correspondance entre les valeurs de γ et celles de g

$-\gamma$	$-g$	$-\gamma$	$-g$	$-\gamma$	$-g$
4	1.00	8	5.83	20	17.94
4,17	1.50	9	6.85	24	21.95
5	2.62	10	7.87	28	25.96
6	3.73	12	9.90	32	29.97
7	4.79	16	13.93	36	33.98
				40	37.98

$$\gamma = g + \frac{1}{g} - 2$$

$$g = \frac{(\gamma + 2) - \sqrt{\gamma^2 + 4\gamma}}{2}$$

5. — INTRODUCTION DES VARIABLES m ET n . — A. Posons

$$m = \frac{2l}{F_0}$$

$$n = \frac{l}{2(f_1 + f_2)}$$

Il vient

$$f_1 + f_2 = \frac{l}{2n} \quad f_1 f_2 = \frac{l^2}{mn}$$

Introduisons dans (1). On a

$$\varepsilon^2 + \gamma \frac{l^2}{mn} + \frac{l^2}{n} - l^2 = 0$$

ou

$$\varepsilon^2 + \frac{l^2}{mn} [\gamma + m(1 - n)] = 0 \quad (1')$$

B. Il suit des valeurs ci-dessus de $f_1 + f_2$ et $f_1 f_2$ que les quantités f_1 et f_2 sont les deux racines f de l'équation

$$f^2 - 2f \frac{l}{4n} + \frac{l^2}{mn} = 0$$

soit

$$f = \frac{l}{4n} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{16n}{m}} \right)$$

avec

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{16n}{m}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{16n}{m}}}, \text{ ou l'inverse.}$$

$\frac{f_1}{f_2}$ est donc constant avec $\frac{n}{m}$.

C. Pour que f soit réel, il faut que l'on ait

$$m \geq 16n$$

Dans un plan m, n (m , axe horizontal; n , axe vertical), $n = \frac{1}{16} m$

représente une droite dont le coefficient angulaire vaut $1/16$. (Voir fig. 2, dans laquelle on a pris des unités différentes pour m et pour n). Toutes les droites $n = Km$ possibles sont comprises entre l'axe des m et la droite $n = \frac{1}{16} m$. A chacune de ces droites correspond une

valeur de $\frac{f_1}{f_2}$.

D. Le tableau ci-dessous donne, pour un certain nombre de valeurs de $\frac{16n}{m}$ les valeurs correspondantes de $\frac{f_1}{f_2}$, ainsi que celles de f_1 et f_2 pour $m = 4$ et $l = 1$.

$\frac{16n}{m}$	$\frac{f_1}{f_2}$	f_1	$<$	b_2
0.25	13.9			
0.30	11.30			
0.35	9.31			
0.40	7.89			
0.45	6.75			
0.50	5.82	0.586		3.414
0.55	5.08	0.595		3.025
0.60	4.43	0.615		2.725
0.65	3.90	0.624		2.436
0.70	3.43	0.651		2.229
0.75	3.00	0.665		1.995
0.80	2.62	0.691		1.809
0.85	2.26	0.717		1.623
0.90	1.93	0.759		1.461
0.95	1.58	0.815		1.285
0.96	1.50	0.832		1.248
0.97	1.42	0.852		1.208
0.98	1.33	0.876		1.164
0.99	1.22	0.909		1.111
1.00	1.00	1.000		1.000

Pour d'autres valeurs de m que 4, les valeurs ci-dessus de f_1 et f_2 doivent être multipliées par $\frac{m}{4}$.

E. Il peut être utile de considérer les valeurs correspondantes de m et de n pour lesquelles on a $mn = \text{constante}$.

Nous avons tracé sur la figure 2 un certain nombre d'hyperboles ayant cette équation, dans la partie utile du plan.

Remarquons encore que pour des valeurs petites de $\frac{16n}{m}$ le rapport $\frac{f_1}{f_2}$ (ou son inverse $\frac{f_2}{f_1}$) prend des valeurs considérables. En général on n'utilisera pas des combinaisons de cette espèce. Seules les valeurs plus grandes p. ex. que $\frac{16n}{m} = 0.50$ ($\frac{f_1}{f_2} = 5.82$) seront en principe intéressantes.

6. — DISCUSSION DE L'ÉQUATION (1'). — A. Elle s'écrit

$$\varepsilon^2 + \frac{l^2}{mn} [\gamma + m(1 - n)] = 0 \quad (1')$$

Dans le plan ε, γ (ε axe horizontal, γ axe vertical) cette équation représente une parabole d'axe vertical, (axe γ) ouverte, en vertu

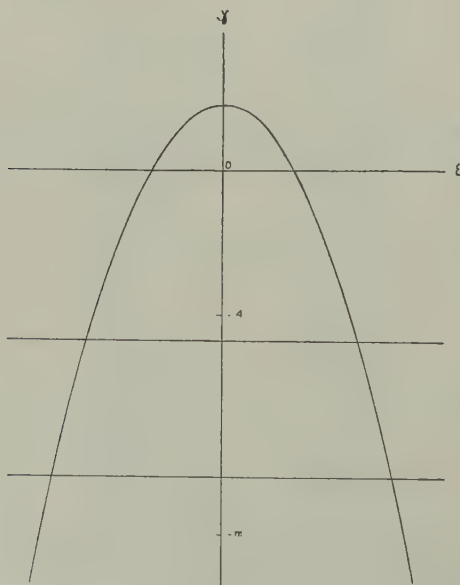


Fig. 1

de ce qui précède, vers le bas. Le sommet de cette parabole se trouve à une distance $-m(1-n)$ de l'origine.

B. — Nous savons que γ ne peut être que négatif. Dans ces conditions à la plus grande valeur absolue de γ correspond la plus grande valeur de ε^2 , et inversement. Or, nous avons vu que la plus grande valeur possible de ε^2 vaut l^2 . (1') donne, pour cette valeur de ε^2 la valeur $|\gamma|_{\text{maximum}} = m$.

Le sommet de la parabole peut maintenant occuper trois positions. On peut avoir $-m(1-n) > -4$ (fig. 1). Si cette condition est réalisée la valeur $\gamma = -4$ est toujours accessible. γ varie entre -4 et $-m$ ($m > 4$), et ε^2 entre deux valeurs toutes deux différentes de zéro. Si l'on a $-m(1-n) = -4$, on a

$$\begin{aligned} -4 &\geq \gamma \geq -m \\ \text{et} \quad 0 &\leq \varepsilon^2 \leq l^2 \end{aligned}$$

Si, en dernier lieu, $-m(1-n)$ est plus petit que -4 , on a simultanément

$$\begin{aligned} -m(1-n) &\geq \gamma \geq m \\ \text{et} \quad 0 &\leq \varepsilon^2 \leq l^2 \end{aligned}$$

Dans ce dernier cas, γ ne peut atteindre la valeur -4 ; par conséquent g ne peut prendre la valeur -1 .

Dans le plan m, n (fig. 2) l'hyperbole

$$-m(1-n) = 4$$

sépare donc les systèmes de valeurs m, n tels que $g = -1$ peut être atteint de ceux où cette relation ne peut exister. La première région du plan est située au-dessus de l'hyperbole, la seconde au-dessous.

C. La discussion B qui précède montre que pour que le problème soit possible, on doit avoir

$$m \geq 4$$

Dans le cas de l'égalité, la seule valeur $g = -1$ est possible.

D. On tire de (1')

$$\varepsilon = \pm \sqrt{-\frac{l^2}{mn}[\gamma + m(1-n)]}$$

ou

$$\frac{\varepsilon}{l} = \pm \sqrt{-\frac{1}{mn}[\gamma + m(1-n)]} \quad (1'')$$

Dans la région du plan m, n pour laquelle on a

$$-m(1-n) \geq -4$$

la plus petite valeur de $\left| \frac{\varepsilon}{l} \right|$ correspond à $\gamma = -4$, la plus grande vaut 1 (pour $\gamma = -m$). Si l'on fait $\gamma = -4$ dans (2') et si l'on donne à $\left| \frac{\varepsilon}{l} \right|$ une valeur déterminée (comprise entre 0 et 1) on a dans

(1'') le lieu des points du plan pour lesquels $\left| \frac{\varepsilon}{l} \right|$ descend jusque cette valeur. Pour tous les points de cette courbe (hyperbole) $\left| \frac{\varepsilon}{l} \right|$

peut varier entre la valeur indiquée sur la courbe (fig. 2) et 1. Les calculs numériques se font commodément en recherchant les intersections de ces branches d'hyperboles avec les hyperboles $mn =$

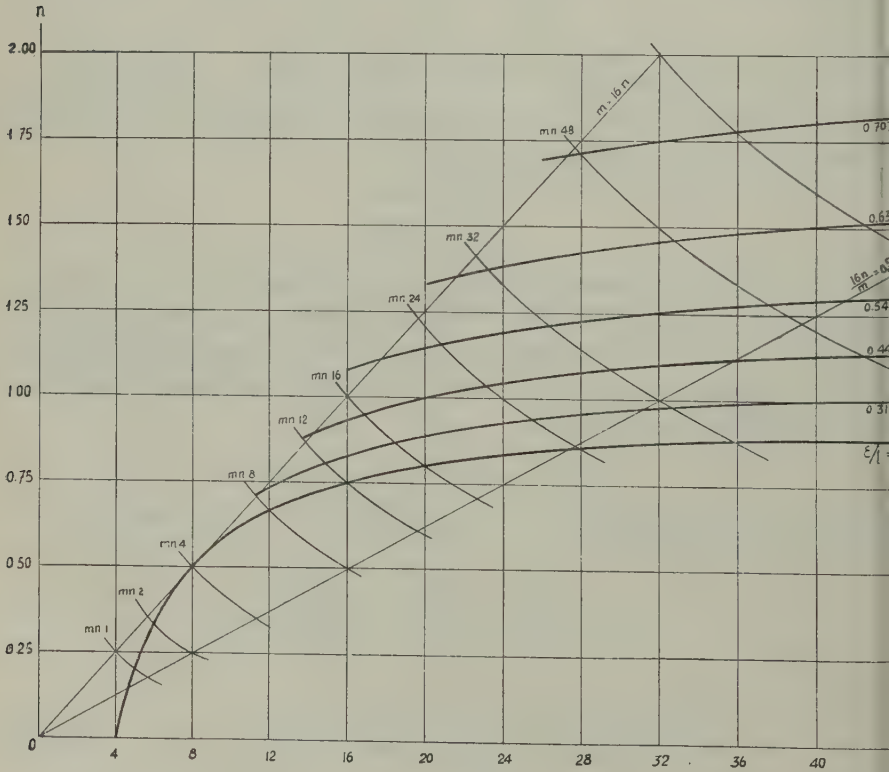


Fig. 2

constante déjà tracées dans le plan m, n . On utilisera pour faire les calculs la relation (1') mise sous la forme ($\gamma = -4$)

$$m = mn \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{l^2} \right) + 4$$

On trouve ainsi les nombres du tableau ci-dessous pour les valeurs de m tirées de la relation précédente ($\varepsilon = -4$).

E. On tire de (1'), par différentiation

$$\delta\varepsilon = \mp \delta\gamma \frac{l}{\sqrt{mn}} \frac{1}{\sqrt{-[\gamma + m(1-n)]}} = \delta d$$

La variation de ε ne peut être infinie que si l'on passe par

$$\gamma = -m(1-n)$$

Si la quantité du second membre est plus grande que -4 , $\delta\varepsilon$ reste toujours fini.

7. — DEUXIÈME RELATION FONDAMENTALE. — C'est celle qui donne ξ (ou x) en fonction de g .

on a

$$\frac{1}{x'_1} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{x_1} \qquad \frac{1}{x'_2} = \frac{1}{f_2} + \frac{1}{x'_1 - 2l - x_1 + x'_2}$$

$$2l = -x_1 + d + x'_2$$

$$g = \frac{x'_1}{x_1} \frac{x'_2}{x'_1 - 2l - x_1 + x'_2}$$

Ce sont les relations de mise en équation du problème. Transformons-les.

L'équation en g peut aussi s'écrire

$$g = \frac{f_1}{f_1 + x_1} \frac{f_2 - x'_2}{f_2}$$

$$\text{car } x'_1 = \frac{x_1 f_1}{x_1 + f_1} \dots$$

D'autre part la seconde des relations peut se transformer en

$$\frac{x'^2_2}{f_2 - x'_2} + \frac{x'_1}{f_1 + x_1} + 2l = 0$$

[illegible]

Si l'on tire x'_2 de la seconde valeur de g et si l'on introduit cette valeur dans la dernière équation ci-dessus, on trouve

$$\frac{f_2}{gf_1} + \frac{2l(x_1 + f_1) + x_1^2}{[f_1 - g(x_1 + f_1)]^2} = 0$$

Posant $\xi_1 = x_1 + f_1$, on tire de la relation précédente

$$\xi_1 = f_1 \frac{-[l - (f_1 + h) \pm \varepsilon]}{f_1 + gf_2} \quad \text{ou}$$

$$(2) \quad \xi = l \frac{-\left(1 - \frac{1}{2n}\right) \pm \frac{\varepsilon}{l}}{1 + g \frac{f_2}{f_1}} = l \frac{-\left(1 - \frac{1}{2n}\right) \pm \sqrt{-\frac{1}{mn}[\gamma + (1-n)]}}{1 + g \frac{f_2}{f_1}}$$

8. — DISCUSSION DE LA RELATION (2). — A. On voit d'abord qu'il est possible, dans l'expression de ξ_1 , de mettre l en évidence comme on l'a fait plus haut pour ε . Cela simplifie les calculs, que l'on peut faire en grande partie en prenant $l = 1$. ξ_1 ne dépend alors que de m et de n , c'est-à-dire finalement que de f_1 et f_2 .

On remarque ensuite que chacune des deux valeurs de ε — égales en valeur absolue mais de signes opposés — définit deux valeurs de ξ_1 . En d'autres termes à toute valeur de y correspondent deux valeurs de ξ_1 . Considéré d'une manière générale, le problème posé admet deux solutions quand on se donne f_1 et f_2 , dans l'ordre. On n'oubliera pas qu'il existe deux autres relations qui correspondent à l'ordre inverse des lentilles, soit L_2, L_1 .

B. Les formules (1') et (2) résolvent le problème posé indépendamment de la restriction que nous avons introduite que les lentilles L_1 et L_2 ne pouvaient traverser les plans P_1 et P_2 . Cette condition s'exprime par les inégalités

$$x_1 = \xi - f \leq 0$$

$$-x_1 + d = -\xi + f_1 + \varepsilon + l \leq 2l \quad (x_1 < 0)$$

La discussion générale de ces inégalités est assez compliquée. Il est sans doute préférable, en pratique, de la faire numériquement.

C. Étudions maintenant le numérateur de $\frac{\xi_1}{l} \cdot \left| \frac{\varepsilon}{l} \right|$ peut varier, selon le système des valeurs m, n , de 0 à 1 ou d'une valeur minimum

que l'on lit sur la fig. 2 à 1, et $\frac{\varepsilon}{l}$ peut prendre, chaque fois, des valeurs symétriques par rapport à zéro.

La quantité $-\left(1 - \frac{1}{2n}\right)$ peut prendre, dans l'intervalle des valeurs de n 0,25 à 2,0, les valeurs reprises dans le tableau ci-dessous portées également sur la fig. 2.

n	$-\left(1 - \frac{1}{2n}\right)$	n	$-\left(1 - \frac{1}{2n}\right)$
0.25	———— +1.000	1.20	———— -0.583
0.30	———— +0.667	1.30	———— -0.615
0.40	———— +0.250	1.40	———— -0.643
0.50	———— 0.000	1.50	———— -0.667
0.60	———— -0.167	1.60	———— -0.687
0.70	———— -0.286	1.70	———— -0.706
0.80	———— -0.375	1.80	———— -0.722
0.90	———— -0.445	1.90	———— -0.737
1.00	———— -0.500	2.00	———— -0.750
1.10	———— -0.545		

L'examen de la fig. 2 ainsi complétée montre que

a. Si $0,25 < n < 0,50$ et $\varepsilon > 0$, le numérateur est > 0 ;

Si $0,25 < n < 0,50$ et $\varepsilon < 0$, le numérateur passe de valeurs positives à des valeurs négatives quand $|\varepsilon|$ passe de sa plus petite valeur à 1. Il prend donc une fois — une fois seulement — la valeur 0.

b. Si $n > 0,50$ et $\varepsilon > 0$, le numérateur passe une fois et une seule par 0;

Si $n > 0,50$ et $\varepsilon < 0$ le numérateur est toujours < 0 .

D. Venons-en au dénominateur. g est < 0 . Le dénominateur prend la valeur 0 pour

$$g = -\frac{f_1}{f_2}$$

E. Pour $g = -\frac{f_1}{h}$, je dis que l'on a

a. si $\begin{cases} 0,25 < n < 0,50 & \text{et } \varepsilon > 0 \\ n > 0,50 & \text{et } \varepsilon < 0 \end{cases}$

$$\xi_1 = \frac{\alpha}{0} = \infty$$

b. si $\begin{cases} 0.25 < n < 0.50 & \text{et } \varepsilon > 0 \\ n > 0.50 & \text{et } \varepsilon < 0 \end{cases}$

$$\xi_1 = \frac{0}{0}.$$

La valeur a. est certaine d'après ce qui précède. Nous allons montrer l'exactitude de la valeur b, et chercher la vraie valeur de cette expression indéterminée.

On trouve facilement, pour $g = -\frac{f_1}{h}$

$$\gamma = -\frac{(f_1 + f_2)^2}{f_1 f_2}$$

$$\varepsilon = \pm [l_1 - (f_1 + f_2)]$$

$$d = \begin{cases} 2l - (f_1 + f_2) \\ f_1 + f_2 \end{cases}$$

— Remarquons d'abord, incidemment qu'aux deux valeurs de d correspondent les positions particulières suivantes des lentilles :
 $d = 2l - (f_1 + f_2)$: les plans P_1 et P_2 sont les plans focaux, de L_1 et L_2 .

$d = f_1 + f_2$: le système des deux lentilles est afocal.

— On trouve aussi, pour les deux valeurs de ξ_1

$$\xi_1 = \begin{cases} \frac{0}{0} \\ -\frac{2[l - (f_1 + f_2)]}{0} = \infty \end{cases}$$

Pour trouver, dans $\xi_1 = \frac{0}{0}$, la vraie valeur de l'expression pour

$= -\frac{f_1}{f_2}$, il faut dériver les deux termes de l'expression générale de ξ_1 et y introduire cette valeur de g . On trouve, tous calculs faits,

$$\xi_1 = \frac{f_1^2 - f_2^2}{2[l - (f_1 + f_2)]}$$

9. — ÉTUDE DES POSITIONS OCCUPÉES PAR LA LENTILLE L_1 .
 Elles sont définies, en fonction de g , par la relation

$$x_1 = \xi_1 - f_1$$

Il est commode de les représenter graphiquement dans un plan (x_1, g) (x_1 abscisses, g ordonnées), les x_1 étant représentés à la manière habituelle, les g de la manière suivante, toute naturelle d'ailleurs : l'axe des x_1 correspond à $|g| = 1$ et les valeurs de $|g|$ sont portées vers le haut comme d'habitude dans une représentation graphique.

Vers le bas on porte les valeurs de $\left|\frac{1}{g}\right|$, la valeur $\frac{1}{2}$ étant écartée de l'axe des x , d'une quantité égale à celle dont est écartée dans l'autre sens la valeur 2 de $|g|$, et ainsi de suite pour les autres valeurs de $|1/g|$. Les positions de L_2 (n° 10) seront représentées sur le même diagramme, qui comportera, d'après ce qui précède, quatre courbes, deux pour L_1 et deux correspondantes respectivement à chacune des précédentes, pour L_2 .

B. Pour fixer les idées et afin d'éclairer la discussion qui va suivre, on calculera avec avantage les courbes L_1 (et L_2) relatives à certaines combinaisons déterminées, par exemple aux suivantes :

a. $l=1, f_1 = f_2 = \frac{2}{3} \quad (m=6, n=\frac{3}{8}=0,375); -m(1-n) = -3,75$

b. $l=1, f_1 = f_2 = 0,4 \quad (m=10, n=0,625); -m(1-n) = -3,75$

c. $l=1, f_1 = \frac{1}{3} f_2 = \frac{1}{2} \quad (m=10, n=0,6); -m(1-n) = -4$

d. $l=1, f_1 = \frac{5}{12} f_2 = \frac{5}{8} \quad (m=8, n=0,48); -m(1-n) = -4,16$

C. Étudions maintenant les courbes L_1 . Elles s'étendent entre les valeurs extrêmes $|g|_m$ et $\frac{1}{|g|_m}$, qui correspondent à $\gamma = -m (\varepsilon = \pm l)$.

Dans cet intervalle les courbes existent pour toute valeur de g si $-m(1-n)$ est plus grand que -4 ; si l'on a $-m(1-n) < -4$ (cas *d* ci-dessus) la courbe n'existe pas entre les valeurs inverses de g qui correspondent à $\gamma = -m(1-n)$ (Dans le cas *d*) ci-dessus les 2 courbes L_1 n'existent pas entre des valeurs de g sensiblement égales

à $-1,5$ et $-\frac{1}{15}$. D'ailleurs, pour $\gamma = -m(1-n)$, les deux valeurs de ε sont égales à 0 : il n'existe, pour les deux courbes L_1 qu'une valeur de x_1 , c'est-à-dire qu'elles se raccordent en ce point, défini par

$$x_1 = l \frac{-\left(1 - \frac{1}{2n}\right)}{1 + g \frac{f_2}{f_1}} - f_1$$

Ces deux valeurs de x_1 sont d'ailleurs différentes pour $|g| = |g'|$ minimum et $|g| = \frac{1}{|g'| \text{ minimum}}$. Les courbes L_1 et L_2 forment ensemble, en principe, deux courbes en U, l'une ouverte vers le haut et l'autre vers le bas.

Nous savons par ailleurs que (selon que l'on a $n \geq 0.50$) l'une des deux valeurs de ξ_1 (donc de x_1) est infinie pour $g = -\frac{f_1}{f_2}$. Dans le cas où l'on a $-m(1-n) < -4$, on peut dire en définitive que l'une des courbes L_1 est une courbe en S placée horizontalement, et l'autre une courbe de même forme mais ayant toutefois comme asymptotes, de chaque côté, les droites $g = -\frac{f_1}{f_2}$ quand cette droite coupe la courbe en S correspondante. Dans les cas où $-m(1-n) < -4$, l'une des courbes en U peut être traversée par la droite $g = -\frac{f_1}{h}$, ce qui porte à l'infini, pour une des branches de cet U, son point d'intersection avec la droite en question.

Il est clair, qu'en pratique on ne peut utiliser la courbe L d'une combinaison m, n donnée dans le voisinage des valeurs de γ qui rejettent à l'infini le point correspondant de la courbe L considérée.

10. — POSITIONS DE L_2 . — Elles se calculent à partir de celles de L_1 par la relation

$$x_{L2} = -x_1 + d$$

Pour $\gamma = -m$, on a $d = 0$ ou $2l$. Si l'on peut atteindre $\gamma = -4$, la valeur correspondante de d vaut l . On remarquera que d dépend de γ seulement. Cette quantité prend donc la même valeur quand on donne à g deux valeurs inverses. On remarquera aussi que $d = 0$ correspond au cas où les deux lentilles sont au contact et que d'autre part, pour $d = 2l$ ($x_1 < 0$) la longueur de la combinaison (distance d'encombrement) égale à

$$-x_1 + 2l$$

est plus grande que $2l$. En pratique le grossissement maximum ne peut donc être atteint.

11. — CAS PARTICULIER. — Les formules précédentes ne sont pas applicables au cas où $2l = \infty$. Il s'agit dans ce cas d'établir une combinaison de deux lentilles positives ayant une distance focale variable et un plan focal fixe. Nous allons étudier ce cas.

On a

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{F_0} - \frac{d}{f_1 f_2}$$

et, d'autre part,

$$\frac{1}{x'_2} = 0 = \frac{1}{f_2} + \frac{1}{x'_1 - d}$$

$$\text{avec } x'_1 = \frac{f_1 x_1}{f_1 + x_1}$$

c'est-à-dire

$$0 = \frac{f_1 x_1 + f_2 x_1 + f_1 f_2 - d(f_1 + x_1)}{f_2 [f_1 x_1 - d(f_1 + x_1)]}$$

ou, avec la condition

$$f_1 x_1 - (f_1 + x_1) = 0 \quad (a)$$

$$f_1 x_1 - d(f_1 + x_1) + f_2 x_1 + f_1 f_2 = 0 \quad (b)$$

On tire de cette relation

$$x_1 = \frac{f_1(d - f_2)}{f_1 + f_2 - d} \quad (3)$$

et l'on a, par ailleurs

$$d = \left(\frac{1}{F_0} - \frac{1}{F} \right) f_1 f_2 \quad (4)$$

(3) et (4) sont les relations qui résolvent le problème. Pour $d = 0$ on a $x_1 = -F_0$

Quand d tend vers f_2 , F augmente, et

pour $d = f_2$ $x_1 = 0$, $F = f_2$.

La condition (a) jointe à (b) revient à $x_1 \neq -f_1$. Elle est nécessairement satisfaite en pratique si $f_2 < f_1$. Et si $f_2 > f_1$, il est clair que $x_1 = -f_1$ ne peut être atteint que pour $d = \infty$.

12. — PROBLÈME SPÉCIAL. — A. Le véhicule redresseur d'une lunette est constitué comme les systèmes que nous avons considérés ci, avec la restriction $g = \text{constante}$.

Le problème qui se pose est celui du calcul des distances focales de L_1 et L_2 . En dehors de la condition de la reproduction de P_1 et P_2 on impose la condition supplémentaire de la reproduction de la pupille d'entrée p_1 de l'instrument complet par le système L_1, L_2 en un endroit déterminé p_2 (Fig. 3).

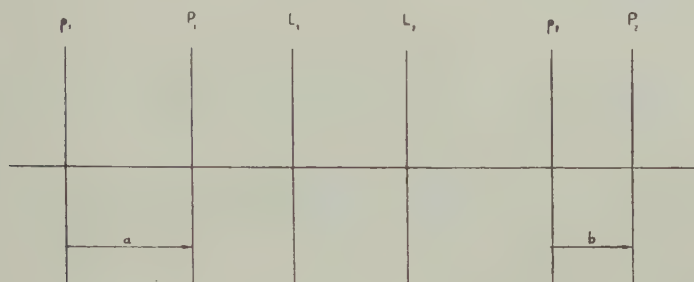


Fig 3

Appelons a et b respectivement les distances qui séparent les plans p_1, P_1 et p_2, P_2 . Avec par ailleurs les notations du n° 3 nous pouvons écrire

$$\frac{1}{p' - b} - \frac{1}{p - a} = \frac{1}{F}$$

Or

$$p = \frac{1 - g}{g} F \quad \text{et} \quad p' = (1 - g) F$$

Introduisant ces valeurs dans la première relation, on trouve

$$\frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2 - d} = F = \frac{abg}{b - ag^2} \quad (5)$$

Reprenons les relations (1) et (2)

$$(\varepsilon = d - l) \quad \gamma + \frac{d_2}{f_1 f_2} + \frac{2l}{F} = 0 \quad (1)$$

$$(\xi_1 = x_1 + f_1) \quad \xi_1 = f_1 \frac{-[l - (f_1 + f_2)] \pm \varepsilon}{f_1 + g f_2} \quad (2)$$

(5), (1) et (2) sont les équations qui permettent de résoudre le problème posé. On posera $1 = 1$.

B. On se donne g et la condition $f_1 = f_2 = f$.

(5) permet de calculer la valeur de F . Il reste à calculer d et f pour les relations

$$F = \frac{f_2}{2f - d} \quad \text{et} \quad \gamma + \frac{d_2}{f_2} + \frac{2}{F} = 0$$

La première s'écrit

$$F = \frac{f}{2 - \frac{d}{f}}$$

on calcule $\frac{d}{f}$ par la seconde. La première donne f . D'où enfin d par la valeur trouvée pour $\frac{d}{f}$.

C. On se donne g et d . A calculer f_1 et f_2

(5) permet le calcul F et (1) celui de $f_1 f_2$. D'où $f_1 + f_2$ par $F = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2 - d}$. f_1 et f_2 sont les racines d'une équation du 2^d degré dont on connaît la somme et le produit des racines.

D. On se donne d et x_1 . A calculer f_1 et f_2 . S'imposant plusieurs valeurs de g , on opérera chaque fois comme en C ci-dessus. On calculera les valeurs de x_1 par (2). On déterminera la bonne valeur de g par interpolation. Il suffira alors de résoudre une dernière fois le problème C, et de vérifier.

Sur une unité absolue de quantité de couleur et son emploi

Note de M. A. BIOT

Soit une couleur quelconque (C_i). Elle est caractérisée, dans le système colorimétrique international (XYZ, E) par l'équation unitaire

$$\begin{aligned} C_i &= x_i X + y_i Y + z_i Z \\ (x_i + y_i + z_i) &= 1 \end{aligned} \tag{1}$$

Cette relation peut se lire comme suit :

Deux nombres, x_i et y_i , par exemple, suffisent pour caractériser une couleur (puisque $z_i = 1 - [x_i + y_i]$). Ces nombres expriment combien il faut d'unités colorimétriques X et Y des couleurs de référence (X) et (Y) pour reproduire une unité colorimétrique C_i de la couleur étudiée (C_i).

On peut toutefois la lire autrement. Elle exprime en effet que l'on peut reproduire, à la fois en brillance visuelle et en couleur, dans un colorimètre trichromatique approprié, l'effet d'un flux donné Φ_i de couleur (C_i) à l'aide d'un mélange de trois flux convenables Φ_x , Φ_y , Φ_z des couleurs de référence (X), (Y), (Z). Ici, les couleurs de référence sont irréelles, mais cela n'a pas d'importance au point de vue des raisonnements.

Au lieu de la couleur quelconque (C_i) considérons la couleur de base (E). On peut écrire dans ce cas

$$E = \frac{1}{3} X + \frac{1}{3} Y + \frac{1}{3} Z \tag{2}$$

et cette relation peut se lire « par les flux » comme l'équation (1).

De sorte que, si l'on appelle « quantité unitaire » de couleur celle qui correspond à un flux de grandeur donnée, les équations (2), puis (1), permettent de définir successivement la quantité unitaire d'une couleur quelconque en partant de la quantité unitaire de la couleur (E)

Dans les conditions où les principes de la colorimétrie trichromatique classique sont applicables (recommandations CIE 1931), la couleur qui correspond à un flux donné est indépendante de la grandeur de ce flux exprimée en lumens. La grandeur du flux qui correspond à une quantité unitaire de la couleur (E), c'est-à-dire à une quantité unitaire d'une couleur quelconque, est donc arbitraire dans de larges limites. Il suffit, au point de vue de la seule caractérisation des couleurs, que le flux unitaire arbitraire attribué à la couleur (E) reste constant en grandeur tout au long d'un même problème. En d'autres termes, il suffit alors de considérer des quantités *relatives* de couleur.

Il peut y avoir intérêt cependant à faire correspondre à la quantité unitaire d'une couleur quelconque un flux déterminé en lumens, d'utiliser donc des unités *absolues*. Il suffit pour cela d'attribuer au flux Φ_E ($E = 1$) une valeur déterminée en lumens. Nous conviendrons qu'une unité absolue de la couleur (E) correspond à un flux Φ_E de 1 lumen. Dans ces conditions, étant donné, d'une part, que les facteurs colorimétriques de luminosité des couleurs de référence (X) et (Z) sont nuls, d'autre part, que l'on admet qu'il est égal à l'unité pour la couleur (Y), on voit que :

1° A une unité colorimétrique (absolue) de (Y) correspond un flux de 3 lumens ;

2° A une unité colorimétrique (absolue) d'une couleur quelconque (C_i) correspond un flux de $3g_i$ lumens ;

3° A m_i unités colorimétriques (absolues) de la couleur (C_i) correspond un flux de $3m_i g_i$ lumens.

Appelons « chrom » ($x_i y_i z_i$), pour faire court, l'unité colorimétrique absolue de la couleur (C_i) caractérisée par les coordonnées x_i, y_i, z_i dans le système colorimétrique international (XYZ, E).

Il est normal, dans ces conditions, de définir également une *brillance* ⁽¹⁾ *colorimétrique*.

Soit un élément de surface dS qui émet dans une direction déterminée. Si la brillance visuelle suivant cette direction est B_v , le flux élémentaire qui correspond à cette même direction est (dans l'angle solide élémentaire $d\omega$)

$$B_v dS d\omega$$

⁽¹⁾ ou luminence.

Il vaut d'autre part

$$3my_i$$

umens.

D'où

$$B_v dS d\omega = 3my_i \quad (3)$$

que nous écrirons

$$B_v dS d\omega = 3 B_c dS d\omega y_i$$

par définition de la brillance colorimétrique B_c .

On a donc

$$B_c = \frac{B_v}{3y_i} \quad (4)$$

Les relations (3) et (4) établissent à suffisance la liaison entre les unités photométriques habituelles et les unités colorimétriques (absolues) que l'on peut définir par ailleurs.

On peut prévoir des applications diverses des considérations que nous venons d'indiquer.

Un premier exemple de leur emploi se rencontre dans l'exposé de la théorie des couleurs. Cette théorie en effet devient bien plus concrète quand on considère des quantités absolues de couleur. On peut s'en rendre compte déjà par ce qui précède. Et il est facile de le montrer.

On trouvera un second emploi du « chrom » dans la photométrie des sources colorées chaque fois qu'il s'agira de déterminer l'effet dû à un mélange de flux de couleurs différentes. Traitons un exemple, simple.

Deux sources jointives émettent suivant une direction donnée et dans l'angle solide unité des quantités absolues de couleurs respectivement égales à m_1 chroms ($x_1 y_1 z_1$) et à m_2 chroms ($x_2 y_2 z_2$). Calculer l'effet résultant suivant la direction considérée.

m_1 unités colorimétriques absolues ($x_1 y_1 z_1$) se combinant à m_2 unités colorimétriques absolues ($x_2 y_2 z_2$) donnent $(m_1 + m_2)$ chroms ($\xi \eta \zeta$)

els que

$$\xi = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

$$\eta = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2}$$

$$\zeta = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2}{m_1 + m_2}$$

Le nombre de lumens transportés vaut

$$3 (m_1 + m_2) \eta = 3 (m_1 y_1 + m_2 y_2)$$

Nous supposons bien entendu que les conditions de mesure soient d'accord avec les conditions d'observation C. I. E. 1931.

Transformation graphique des coordonnées colorimétriques

Note de M. A. BIOT

1. *Le problème.* — Il arrive fréquemment que, possédant les coordonnées d'une couleur dans un système colorimétrique, on désire exprimer ces coordonnées dans un autre système. Le cas qui se présente le plus souvent est celui du passage du système instrumental qui correspond à un colorimètre trichromatique particulier au système international (XYZ, E). C'est ce cas que nous aurons principalement en vue dans cette note.

Le passage d'un système à l'autre peut se faire par le calcul. On peut cependant obtenir une précision suffisante pour la plupart des cas de la pratique par voie graphique. Holmes ⁽¹⁾ a décrit un abaque qui résout le problème sans presque aucun calcul. Dans un ordre d'idées peu différent, Hardy ⁽²⁾ a publié un dessin du triangle XYZ portant un système de courbes et de droites qui permet de trouver, à simple lecture, la longueur d'onde dominante et la pureté qui correspondent à des coordonnées xyz déterminées. Nous voudrions montrer ici qu'il est possible de tracer, dans un triangle XYZ un ensemble de droites graduées qui font correspondre, à tout système de valeurs xyz un système de valeurs instrumentales rgb , et ce avec une précision généralement suffisante.

Nous nous baserons pour cela sur le fait général que les coordonnées d'une couleur quelconque exprimées dans un système colorimétrique également quelconque sont reliées à celles de la même couleur dans tout autre système par des relations homographiques, de sorte que, dans une représentation géométrique, à toute droite du plan qui correspond à l'un des systèmes correspond une droite dans l'autre plan. Nous supposerons par ailleurs que le colorimètre trichromatique

⁽¹⁾ B.J. HOLMES. Rapid mathematical method for trichromatic colorimetry, *Proc. Phys. Soc.* 47 (1935) 400-412.

⁽²⁾ A.C. HARDY, *Handbook of colorimetry*. Cambridge, Massachusetts, 1936.

utilisé est étalonné, ce qui est pratiquement toujours le cas. On connaît donc, dans le système (XYZ, E), les coordonnées des couleurs de référence (R), (C), (B) et de la couleur de base (S) du système instrumental.

Nous prendrons comme triangle des couleurs, pour fixer les idées, un triangle équilatéral.

2. *Formules préliminaires.* — Entre les coordonnées xyz et rgb existent les relations suivantes

$$r = \frac{ax + by + cz}{dx + ey + z} \quad g = \frac{a'x + b'y + x'z}{dx + ey + z} \quad b = \frac{a''x + b''y + c''z}{dx + ey + z} \quad (1)$$

$$r + g + b = 1 \quad x + y + z = 1 \quad (2)$$

Éliminons z des relations (1) par la seconde des relations (2). Il vient

$$r = \frac{Ax + By + C}{Dx + Ey + 1} \quad g = \frac{A'x + B'y + C'}{Dx + Ey + 1} \quad b = \frac{A''x + B''y + C''}{Dx + Ey + 1} \quad (1')$$

Pour le passage par voie numérique de xyz à rgb — ou inversement — il suffit de connaître la valeur des coefficients $A, B \dots$. Ces coefficients peuvent s'obtenir si l'on connaît les valeurs spéciales de xyz qui correspondent à quatre couleurs dont on connaît aussi les coordonnées rgb . Les calculs sont les plus simples quand ces couleurs sont les couleurs de référence et de base de l'un des systèmes, par exemple — ce que nous allons considérer en détail — celles du système (RGB, S). On a alors en effet

$$\begin{aligned} r_1 &= 1 & g_1 &= 0 & b_1 &= 0 \\ r_2 &= 0 & g_2 &= 1 & b_2 &= 0 \\ r_3 &= 0 & g_3 &= 0 & b_3 &= 1 \\ r_4 &= 1/3 & g_4 &= 1/3 & b_4 &= 1/3 \end{aligned}$$

et les relations qui déterminent $A, B \dots$ peuvent s'écrire

$$\begin{aligned} A(x_1 - x_2) + B(y_1 - y_2) - Dx_1 - Ey_1 - 1 &= 0 \\ A(x_2 - x_3) + B(y_2 - y_3) &= 0 \\ 3A(x_4 - x_3) + 3B(y_4 - y_3) - Dx_4 - Ey_4 - 1 &= 0 \\ A'(x_2 - x_1) + B'(y_2 - 1) - Dx_2 - Ey_2 - 1 &= 0 \\ A'(x_3 - x_1) + B'(y_3 - y_1) &= 0 \\ 3A'(x_4 - x_3) + 3B'(y_4 - y_3) - Dx_4 - Ey_4 - 1 &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

après élimination des coefficients C et C' .

Divisons chacune de ces équations par le coefficient correspondant de A et A' et éliminons ces inconnues par soustraction deux à deux des relations obtenues. Opérons de même sur les nouvelles équations pour les inconnues B et B'. Il reste deux équations en D et E que l'on peut résoudre par la méthode habituelle.

Posons

$$M = 3 (x_4 - x_3) \left(\frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3} - \frac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3} \right)$$

$$N = (x_1 - x_2) \left(\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} - \frac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3} \right)$$

$$M' = 3 (x_4 - x_3) \left(\frac{y_4 - y_3}{x_3 - x_1} - \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} \right)$$

$$N' = (x_1 - x_2) \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} \right)$$

$$P = (M - N) (N'y_4 - M'y_2) - (M' - N') (Ny_4 - My_1)$$

$$Q = (M' - N') (Nx_4 - Mx_1) - (M - N) (N'x_4 - M'x_2)$$

$$R = (Nx_4 - Mx_1) (N'y_4 - N'y_2) - (Ny_4 - My_1) (N'x_4 - M'x_2)$$

On trouve successivement

$$D = \frac{P}{R} \quad E = \frac{Q}{R}$$

$$B = \frac{Dx_1}{N} + \frac{Ey_1}{N} + \frac{1}{N} = \frac{1}{N} (Dx_1 + Ey_1 + 1)$$

$$B' = \frac{1}{N} (Dx_2 + Ey_2 + 1)$$

$$A = -B \frac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3} \quad A' = -B' \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}$$

$$C = -Ax_2 - By_2 \quad C' = -A'x_1 - B'y_1.$$

3. *Considérations géométriques.* — Considérons toutes les couleurs pour lesquelles r prend une valeur constante déterminée. Elles sont représentées dans le plan RCB sur une droite parallèle à SB. Donnons à r toutes les valeurs possibles de 0 à 1. Les droites correspondantes sont toutes parallèles et se coupent au point à l'infini de la droite SB. Opérons de même avec les coordonnées g et b . Nous définissons de la

sorte trois faisceaux des rayons (parallèles) qui ont leur sommet sur la droite à l'infini du plan RSB. A cette dernière droite correspond une droite quelconque du plan XYZ sur laquelle se trouvent les sommets des faisceaux quelconques qui correspondent aux trois faisceaux définis plus haut. A toute droite de l'un des faisceaux quelconques correspond une valeur de r , ou de g , ou de b . De sorte que tout point du plan XYZ est caractérisé d'une part et à la manière habituelle par ses trois coordonnées xyz , d'autre part par trois nombres rgn , et ces valeurs xyz , rgb sont les coordonnées d'une même couleur prises respectivement dans les deux systèmes colorimétriques considérés.

4. *Réalisation du graphique. Première méthode.* — Les coordonnées xyz des points correspondants A, B, C, dans le plan XYZ, des points à l'infini des droites RS, SB, BR se trouvent en résolvant les systèmes

$$\begin{cases} A'x + B'y + C' = 0 \\ Dx + Ey + 1 = 0 \end{cases} \dots\dots$$

Représentons, dans le plan XYZ, les points R, S, B, S, A, B, C.

Ceci fait, remarquons que la première des relations (1') définit, en fonction de x arbitraire, toutes les droites du plan XYZ qui font partie du faisceau de sommet A.

Considérons, dans le même plan, une droite fixe, par exemple $y = 0$ et recherchons l'intersection de cette droite avec un nombre suffisant de droites du faisceau A. Cette droite $y = 0$ peut maintenant être graduée en r . En joignant à A ces différents points nous pouvons tracer autant de rayons gradués que nous voulons du faisceau A. Et nous pouvons opérer de même pour les faisceaux B et C.

Il peut toutefois se présenter une difficulté, si un ou plusieurs des points A, B ou C se trouvent en fait à grande distance du triangle RSB. Il est indiqué dans ce cas de chercher l'intersection des rayons provenant du ou des points en question non pas avec une seule droite voisine du triangle RSB, mais avec deux.

5. *Réalisation du graphique. Seconde méthode.* — On peut obtenir le graphique précédent par voie purement géométrique, sans calcul. On se basera pour cela d'abord sur le fait que si les points $x_1 y_1 z_1$, $x_2 y_2 z_2$ correspondent respectivement à $r_1 g_1 b_1$, $r_2 g_2 b_2$, la droite qui joint les deux premiers points correspond à celle qui joint les

deux autres; ensuite sur certaines propriétés de la représentation dans le triangle équilatéral RGB que nous allons indiquer.

Menons les hauteurs RM, RN, RO de ce triangle (Il ne peut y avoir confusion dans le double emploi que nous faisons dans cette note des lettres M et N). Joignons MN, NO, OM. Ces droites correspondent à $r = g = b = 1/2$. Dans le triangle R'G'B' correspondant de RGB dans le plan XYZ, c'est le point S' qui correspond au point d'intersection des hauteurs de RGB. Nous pouvons donc tracer les droites R'S', ... qui correspondent aux hauteurs et les droites R', M' ... peuvent être cotées respectivement $b' = 1/2$... Considérons maintenant dans le triangle RGB les figures MONB, MORN. Ce sont des parallélogrammes, et pour chacun d'eux aux points d'intersection des diagonales correspond la valeur $g = 1/4$. Nous pouvons donc tracer le rayon $r = 1/4$ dans le plan XYZ, et ainsi de suite.

En principe la construction purement géométrique est moins précise que la précédente. Mais il est possible de les combiner en calculant par exemple quelques points et en construisant la construction par voie géométrique.

6. *Système instrumental et système XYZ.* — Dans un colorimètre trichromatique les couleurs de référence sont en général obtenues en plaçant des filtres convenables devant des sources de lumière blanche. Ces couleurs sont en principe très saturées. Leurs points représentatifs sont souvent voisins de ceux qui correspondent aux radiations monochromatiques $\lambda = 435 m\mu$, $\lambda = 510$ à $530 m\mu$ et $\lambda = 700 m\mu$. Dans le triangle XYZ le triangle RGB correspondant a des côtés qui sont entre eux suivant des rapports voisins de 62 : 82 : 88. Les couleurs de base, d'autre part, correspondent en général aux sources B, C ou E de la C. I. E. Il en résulte que les points A, B, C sont assez éloignés du triangle R', S', B' et que l'on devra avoir recours aux indications relatives à ce cas que nous avons données plus haut.

L'échelle du dessin devra être prise selon la précision que l'on désire obtenir. On peut se proposer en effet d'établir un diagramme du genre de celui que nous venons de décrire soit pour la détermination effective des xyz qui correspondent à un système de valeur rgb donné soit simplement pour vérifier des résultats obtenus par le calcul.

Équipement électronique des jauges à vide de la machine de Van de Graaff de Louvain

L'accélération des électrons ou des ions positifs dans une machine de Van de Graaff s'effectue dans une colonne d'accélération à l'intérieur de laquelle on doit maintenir un vide aussi poussé que possible.

L'expérience a prouvé que suivant le type de machine, on doit travailler à un vide inférieur à 2.10^{-5} mm Hg à 10^{-4} mm Hg. Pour les accélérateurs du type qui nous intéressent pour cette note, l'impédance de la colonne d'accélération est de l'ordre de 5.10^{-3} sec/litre, et le vide est maintenu au moyen d'une pompe à diffusion à vapeur d'huile de 250 litres/sec. Cette pompe ne peut évidemment fonctionner que si le vide primaire est suffisant. Ce vide primaire est fourni par une pompe rotative.

Dans ce genre de machine, plusieurs genres d'accidents peuvent se produire qui ont pour résultat une entrée d'air dans la colonne et une augmentation de la pression. Des causes évidentes sont par exemple : la dislocation d'un joint par suite de légères vibrations mécaniques ou de tensions électriques qui font parfois bouger l'ensemble du Van de Graaff; la rupture de la cible ou de la fenêtre de sortie de la section d'accélération, suite à un trop grand échauffement; rupture d'une entrée d'électrode dans la source ionique ou le canon électronique.

Notons que lors de la mise en marche de la machine, on produit invariablement plusieurs dégazages locaux sans conséquence funeste.

Une entrée d'air importante dans la colonne peut avoir des conséquences très graves pour une grande partie de l'appareillage auxiliaire; il peut en résulter, par exemple, une oxydation de l'huile de la pompe à diffusion, qui la rend inutilisable et qui nécessite de devoir démonter la pompe, la nettoyer et la remettre en service; la perte de temps peut être considérable. Il est vrai que l'emploi de l'Huile Silicone minimise les dégâts. Comme autre conséquence, une entrée d'air peut brûler très vite les filaments de jauges à ionisation et le filament de la source électronique.

Il est clair par conséquent que les jauges qui mesurent le vide et l'appareillage électronique doivent remplir un rôle assez spécial, que nous allons tâcher de définir.

Du point de vue des jauges elles-mêmes, nous devons avoir des jauges capables d'indiquer les pressions qui nous intéressent, soit

- 1) un vide primaire généralement supérieur à 10^{-3} mm Hg
- 2) un vide poussé, compris entre 10^{-6} et 10^{-4} mm Hg.

La première série de jauges par exemple nous dira que le vide atteint par la pompe rotative est suffisamment bon et que la pompe à diffusion peut être allumée. Une telle jauge doit pouvoir fonctionner à toute pression sans danger de se détériorer. Notons qu'en principe on pourrait se servir d'une telle jauge pour déclencher certains relais de sécurité; ceci est parfois fait; nous avons préféré adopter un autre système.

Il est préférable que ces jauges indiquant la pression d'une façon continue, soient robustes du point de vue mécanique et électrique et ne dégagent aucune vapeur nuisible au système à vide.

Les jauges de la deuxième série doivent indiquer de façon continue la pression avec un délai aussi court que possible.

JAUGES POUR VIDE PRIMAIRE

Excluant évidemment la jauge de McLeod qui ne peut nous donner de lecture continue et qui en plus d'être fragile, dégage des vapeurs de mercure nuisible, il nous reste, comme jauge pratique dans cette région de pression de l'ordre de 10^{-3} mm Hg ou plus, les jauges Pirani et les jauges thermocouples. Nous avons finalement adopté les jauges thermocouples, puisque ces jauges ne nécessitent pas une jauge témoin de compensation de la température ambiante, chose absolument nécessaire pour les jauges Pirani de quelque sensibilité.

Nous employons les jauges RCA 1946 chauffées à 70 mA, qui donnent un signal entre 1 et 12 mV pour une bande de pression entre 1 mm et 0.001 mm Hg lorsque le filament est chauffé en courant continu.

On pourrait facilement étendre cette bande de pression indiquée par la jauge; on sait en effet qu'en chauffant plus fort le filament on décale la bande de pression vers les plus hautes pressions et en diminuant le chauffage, on peut plus facilement lire des changements de pression à de plus basses pressions.

Nous avons installé une telle jauge dans la colonne d'accélération

juste à la sortie du tank; cette jauge nous donne l'état du vide à tout moment; de plus, étant très sélective à la présence d'hydrogène ou d'hélium, elle peut être employée pour la recherche d'une fuite.

Une autre jauge thermocouple est placée entre la pompe à diffusion et la pompe rotative.

Le circuit électrique de chacune de ces jauges est excessivement simple : nous employons en commun pour les deux jauges un seul transformateur basse tension et un seul redresseur et filtrage. La

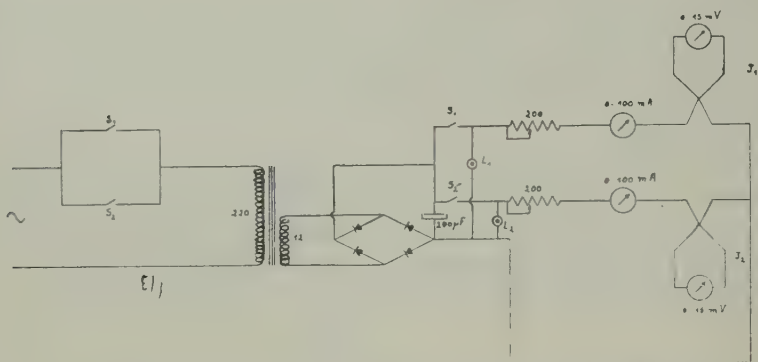


FIG. 1

fig. 1. donne les détails du circuit. On peut régler manuellement et individuellement le chauffage de chacune des jauges au moyen d'un potentiomètre monté en résistance variable en série avec les filaments.

JAUGES POUR VIDE POUSSÉ

Pour la mesure du vide poussé, plusieurs types de jauges sont susceptibles d'être employés. Nous nous sommes arrêtés aux jauges à ionisation et aux jauges Phillips; avant de les décrire plus à fond, notons que nous avons disposé une jauge à ionisation et une jauge Phillips dans la colonne d'accélération à la sortie du tank, près de la jauge thermocouple.

Nous avons également placé une jauge à ionisation près de la pompe à diffusion; cette jauge est utile lorsque la machine opérant en rayons X, l'ionisation ambiante autour de la cible peut fausser non seule-

ment l'opération des jauges dans la colonne mais aussi causer des chemins de fuite de plus faible résistance dans l'air autour des conducteurs.

a) *Jauges à ionisation*

Une jauge à ionisation est constituée de trois électrodes : un filament, une grille et une plaque ; on maintient la grille à une tension positive par rapport au filament (de l'ordre de 100 à 200 volts), la plaque est maintenue à une tension de l'ordre de 20 à 30 volts, négative par rapport au filament. Les électrons émis par le filament sont attirés vers la grille mais s'arrêtent avant d'arriver à la plaque, étant donné la tension négative de celle-ci. Ils sont finalement collectés par la grille. Lors de leur course, ces électrons auront pu ioniser partiellement les molécules résiduelles du gaz, et les ions positifs ainsi formés seront collectés par la plaque. La mesure de ce courant ionique donne l'état du vide dans la jauge. On a l'habitude de maintenir, le courant électronique à la grille, constant (10 mA ou 20 mA) en ajustant le chauffage du filament et le courant ionique, collecté à la plaque, est alors proportionnel à la pression. A 10 mA de courant grille, la sensibilité des jauges à ionisation est de l'ordre de la centaine de microampères par micron (10^{-3} mm) de pression. Une jauge à ionisation n'est pas une jauge absolue en ce sens que nous devons nous baser sur les données de sensibilité fournies par le constructeur. Une certitude plus grande sur la calibration pourrait être obtenue si on recalibrerait chaque jauge au moyen d'une jauge de McLeod, par exemple. Cependant l'expérience prouve que toutes les jauges d'une même série commerciale ont une sensibilité pratiquement identique, et de plus la déviation du vide mesuré par rapport au vide réel ($\pm 5\%$) est généralement largement inférieure à la précision désirée. Nous négligeons cette déviation et employons la calibration commerciale pour calibrer éventuellement d'autres types de jauges.

La grande difficulté dans l'emploi des jauges à ionisation réside dans la fragilité du filament ou de la cathode. Dans un système parfaitement propre, sans vapeur d'eau, sans huile, ni halogènes, le vide étant très bon, la vie d'un filament de jauge à ionisation peut atteindre 1000 heures. Dans le cas inverse, quelques heures représentent la durée moyenne d'un filament.

Un filament thorié résiste généralement mieux à l'empoisonnement

par vapeur d'eau qu'un filament en tungstène pur qui lui s'use très rapidement.

Des expériences effectuées à Berkeley semblent indiquer que l'usure d'un filament en tungstène pur par bombardement par les ions positifs est négligeable en comparaison de l'usure causée par la vapeur d'eau.

Il est donc de première importance d'inclure dans le circuit de pompage une trappe à eau (P_2O_5 etc...).

Remarquons également que ces mêmes expériences de Berkeley indiquent que cette usure progressive du filament requiert une diminution de la puissance nécessaire au chauffage, de l'ordre de 1 watt par heure. Un gros filament et un gros wattage initial signifie généralement une plus longue vie. On a remarqué également que pour maintenir l'émission électronique constante, on doit varier non seulement le chauffage du filament progressivement pour parer à l'effet d'usure indiqué ci-dessus, mais aussi on doit pouvoir varier la puissance de chauffage, d'un facteur 4 ou 5 parfois, lors d'empoisonnement temporaire du filament par de la vapeur d'huile par exemple. Un circuit électronique doit pouvoir être assez souple pour suivre ces variations de lui-même.

Une jauge à ionisation est très sensible à la nature du gaz présent dans le système; à un vide typique de 10^{-4} mm Hg, les sensibilités pour les gaz He- H- air- vapeur d'eau sont dans le rapport 0,2- 0,5- 1- 2, et cette relation est pratiquement constante à des vides depuis 10^{-5} jusque 5.10^{-3} mm.

Le circuit électronique qui contrôle les jauges se divise en deux, après l'alimentation classique de 280 volts fournie par un circuit redressé, filtré et stabilisé par une stabilovolt. En effet, une des jauges à ionisation se manipule à la main, puisqu'elle n'est employée qu'occasionnellement. Les tensions voulues sont prises aux bornes de la stabilovolt et le courant de chauffage se règle en variant le potentiomètre monté en résistance série dans le circuit basse tension du filament. Nous avons inclut un instrument de mesure dans chacune des trois parties du circuit, soit dans le circuit chauffage, dans le circuit du courant d'émission et dans le circuit jauge.

La deuxième jauge à ionisation opère automatiquement pour des raisons de facilité au cours d'expériences pouvant durer plusieurs heures, voire plusieurs jours sans arrêt. Tous les détails du circuit ainsi que du circuit de la jauge non automatique sont donnés sur la figure 2.

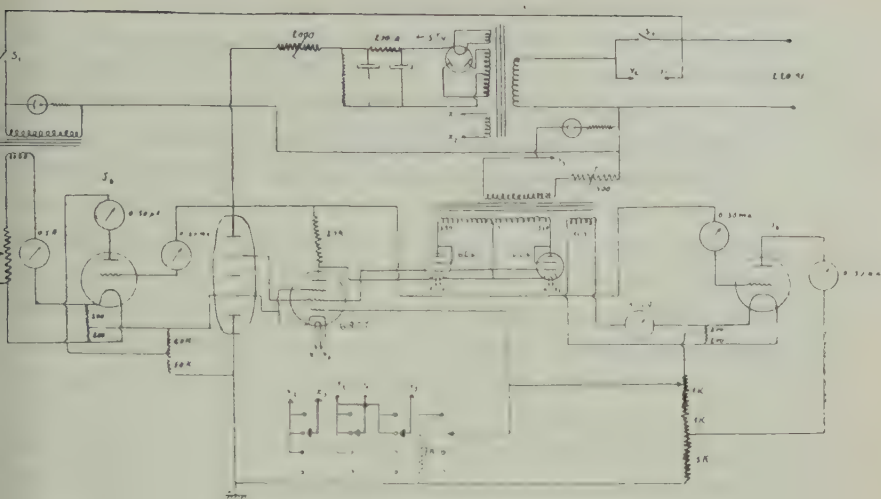


FIG. 2

L'émission électronique produit une chute de tension de 70 volts aux bornes d'une chaîne de résistances en série parallèle qui relie le filament à la masse. Toute variation dans ce courant d'émission se traduit en une variation correspondante de la tension du filament par rapport à la terre. Cette variation de tension est appliquée directement à la grille d'une amplificatrice 6AC7 et la variation amplifiée est appliquée directement au circuit stabilisateur.

Pour le circuit stabilisateur, nous avons adopté un principe bien connu et souvent employé dans des circuits de stabilisation. Nous alimentons le filament par le secondaire 11,3 volts d'un transformateur ordinaire qui comprend en plus deux autres bobinages : le primaire de 0-220 volts et un autre secondaire de 350-0-350 volts. En série avec le primaire nous avons mis une résistance de l'ordre de quelques centaines d'ohms (500 ohms variable). Dans le circuit secondaire à haut voltage, nous avons mis deux 6L6 connectées en triodes; la tension de la grille de ces 6L6 est maintenue constante en les connectant directement à une borne de la stablovolt; la tension de la cathode est, elle, déterminée par la tension plaque de la 6AC7 amplificatrice.

Imaginons que l'émission électronique vienne à augmenter; la tension de la grille de la 6AC7 va monter, par conséquent la tension de la plaque de cette amplificatrice et par conséquent la tension des cathodes des 6L6 va tomber; ceci signifie effectivement que les grilles

des 6L6 montent par rapport aux cathodes et le courant circulant dans le circuit des 6L6 va augmenter. Le primaire verra cela sous forme d'une diminution de l'impédance effective et, puisque les 220 volts d'alimentation se distribuent entre le primaire et la résistance série de 500 ohms, la fraction de voltage prise par le primaire va tomber; par conséquent la tension du secondaire bas voltage du circuit chauffage de la jauge va tomber et le chauffage va diminuer, diminuant ainsi l'émission électronique et en fait la ramenant à sa valeur normale prédéterminée.

Cette stabilisation opère sur une bande de courant de chauffage très étendue; un combinateur à 4 positions établit les opérations suivantes : 1) tout éteint, 2) circuit d'alimentation et chauffage des 6L6 et de la 6AC7 allumés, 3) jauge en opération avec une émission stabilisée de 10 mA, 4) jauge en opération avec une émission de 20 mA.

La résistance série avec le primaire du circuit stabilisateur est réglable et ajustée suivant le type de jauge employée (RCA, Edwards etc.).

De même que pour la première jauge non automatique, nous avons inclu des instruments de mesure dans les circuits de chauffage, d'émission et de courant ionique.

Le circuit des 220 volts qui alimente les deux jauges à ionisation passe par un relais commandé par la jauge Phillips, de telle façon que les jauges à ionisation ne peuvent être mises en marche que si le vide est suffisamment bon.

b) *Jauge Phillips*

Les jauges Phillips se basent sur un type de décharge mis en évidence par Penning; et beaucoup de jauges commerciales adoptent encore la structure des électrodes qu'il avait employée dans son premier montage, soit un anneau métallique entre deux plaques lesquelles sont reliées ensemble électriquement. Ces électrodes sont fixées dans une enveloppe en pyrex (par exemple) qui les relie au système à vide à mesurer. Un champ magnétique permanent extérieur est dirigé avec son axe perpendiculaire à l'anneau et aux plaques. Les têtes de jauge que nous employons momentanément sont des têtes commerciales fabriquées par Edwards. On applique à l'anode (l'anneau) une haute tension positive par rapport aux cathodes; cette tension est de l'ordre de plusieurs centaines de volts à quelques milliers de volts, suivant le mode d'opération et la pression. Cette tension

peut être alternative ou redressée. On obtient alors une décharge d'un type très compliqué à décrire exactement; en résumé on peut dire que les électrons, dans la décharge, oscillent entre deux plans équipotentiels de chaque côté de l'anode, et grâce au champ magnétique ils restent localisés suivant des trajectoires d'allure spirale, et oscillent donc jusqu'au moment où ils rencontreront une molécule de gaz; en ce moment ils perdront de l'énergie et pourront très probablement être attirés vers l'anode. En d'autres mots, le libre parcours moyen des électrons est effectivement augmenté considérablement, et ce type de décharge peut opérer jusqu'à de très basses pressions. En fait avec une structure des électrodes entièrement différente de celle décrite ci-dessus, mais avec le même principe d'opération, il nous a été impossible de couper la décharge en jouant sur la pression seulement jusqu'à des pressions aussi basses que 10^{-6} mm Hg. Ceci, à condition d'employer une tension redressée, car avec une haute tension alternative la décharge se coupe à une pression de l'ordre de 10^{-5} mm.

La jauge Phillips est également sensible à la nature du gaz présent; les sensibilités pour les gaz He; H; air; vapeur d'eau sont dans le rapport approximatif de 0,2- 0,3- 1- 1,6. Soit presque la même chose que dans le cas de la jauge à ionisation.

On a coutume d'opérer avec les jauges Phillips à tension d'anode constante, et de mesurer le courant qui passe dans la décharge en fonction de la pression; cette méthode est peu satisfaisante, car l'expérience prouve que la courbe relatant ces deux données à tension constante est telle, qu'avec un instrument de mesure du courant, on ne peut généralement lire qu'une bande de pression variant d'un extrême à l'autre d'un facteur 10 ou 20. Nous avons adopté un système où la tension aux bornes de la jauge est modifiée de façon à maintenir un courant constant dans la décharge (10 micro-amp). On trouve alors qu'un même instrument de lecture peut couvrir en une fois une bande de pressions large d'un facteur 10^3 au moins. De plus, la courbe qui relate la tension nécessaire pour maintenir les 10 micro-amp. au logarithme de la pression est absolument droite.

Le circuit électronique, qui est expliqué sur la fig. 3, a comme fonction de fournir la haute tension d'un maximum de 2000 volts et de la régler automatiquement, de façon à avoir un courant de 10 micro-amp. dans la décharge, quelle que soit la pression.

L'alimentation est constituée d'un redresseur half-wave; l'emploi

d'une triode comme redresseuse permet le réglage de la tension de sortie du redresseur par l'application d'une tension sur la grille du tube, tension fournie par un amplificateur commandé par la jauge, comme on le verra plus loin. L'analyse mathématique du fonctionnement d'un tel redresseur est complexe.

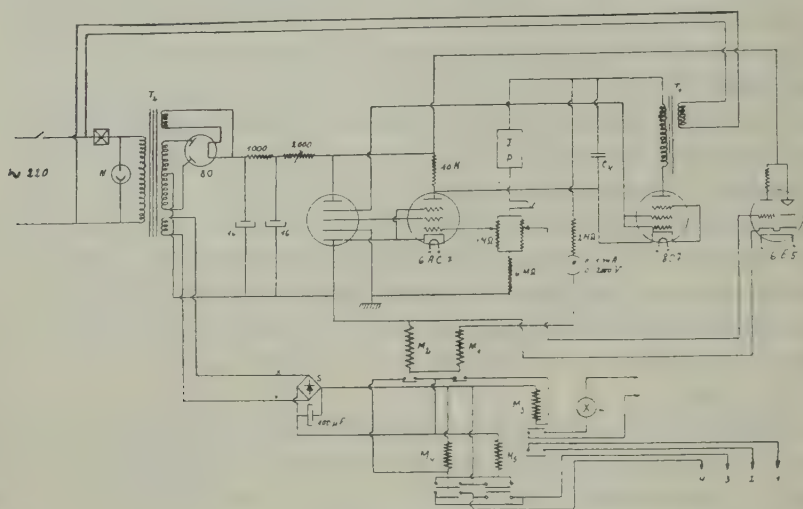


FIG. 3

La triode doit avoir les caractéristiques suivantes :

- 1) mu aussi élevé que possible pour rendre la tension de contrôle nécessaire faible;
- 2) tension inverse 6000 volts.

Nous avons choisi une RCA 807 montée en triode pour avoir un coefficient d'amplification aussi élevé que possible; elle résiste très bien aux tensions employées.

En variant la tension grille entre -1 et -9 volts, on obtient un réglage de la tension de sortie entre zéro et la pleine tension pour une résistance de charge de 2 Mohms.

Sur le schéma complet de l'appareil, on reconnaît le redresseur haute tension constitué de T_1 , V_1 , C_4 ; une alimentation stabilisée classique constituée de T_2 , V_5 , R_5 , R_6 , C_1 , C_2 et V_3 .

Le courant circulant dans la jauge passe dans le diviseur potentiométrique constitué de P_1 , P_2 , R_1 et y provoque une chute de tension. Une fraction importante de celle-ci comprise entre le curseur de P_2 et la masse est mise en opposition avec une tension de référence

constituée par la chute de tension dans la première section (0 — 1) de la stabilovolt. La différence des deux tensions est appliquée entre grille et cathode d'une amplificatrice de tension V_2 commandant elle-même la 807 redresseuse. Pour avoir stabilisation il faut que la cathode de cette dernière soit reliée à la plaque de V_2 et sa grille à un potentiel fixe. Donc le courant de charge du redresseur haute tension circule à travers la résistance de charge de V_2 . Ceci provoque une contre réaction gênante et inutile pour V_1 . Pour la réduire au minimum il faut employer une résistance de charge de V_2 aussi faible que possible. Pour conserver un gain suffisant il faut alors employer une lampe à grande pente; c'est la raison pour laquelle V_2 est une 6AC7.

Venons en maintenant à la mesure de la tension aux bornes de la jauge et aux sécurités.

La mesure de la tension devrait se faire entre A et B; en fait on la fait entre A et le point -0 de la stabilovolt. En effet, C se trouve à un potentiel qui ne peut s'écarter du potentiel de B que de quelques volts. Il serait très difficile de faire la mesure entre A et B, à cause de la présence de l'importante résistance R_1 . Le contrôle du courant en fonctionnement pourrait se faire avec un instrument sensible dans le circuit de la jauge. Nous avons adopté une solution plus économique, en contrôlant la chute de tension dans P_1R_1 à l'aide d'un œil magique $V_4 = 6E5$.

Ce système est très simple et très sensible. On a néanmoins prévu un jack J permettant le contrôle du réglage de l'appareil par insertion d'un micro-ampèremètre dans le circuit.

Le courant de mesure de la tension circule aussi dans les relais M_1 et M_2 très sensibles; le premier se ferme à 400 micro-amp. et le second à 200 micro. M_1 ferme M_3 qui éteint l'ampoule L, indicatrice de mauvais vide et ferme un contact (1, 2) intercalé dans le circuit d'alimentation des jauges à ionisation pour empêcher qu'on puisse allumer celle-ci sous un mauvais vide et la détruire.

M_2 , M_4 et M_5 servent à la fermeture du chauffage de la pompe à diffusion; on ne peut se contenter en effet de fermer la pompe en cas de mauvais vide. Car, pour avoir bon vide il faut que la pompe marche et pour que la pompe marche il faudrait un bon vide, ce qui est un cercle vicieux. Dès lors on a adopté le système suivant :

On allume la jauge; le vide est normalement mauvais; M_2 ne se ferme pas, pas plus que M_4 et M_5 . Les bornes 3 et 4 du bloc borne

sont court-circuitées par le second contact de M_5 . Comme ces deux bornes sont intercalées dans le fil OFF du contacteur d'alimentation de la pompe, on peut enclancher celle-ci. Le vide s'améliore, le relais M_2 se ferme, fermant M_4 , celui-ci ferme M_5 par son premier contact; M_5 restera dès lors toujours fermé, car son premier contact sert de contact de maintien. En se fermant, M_5 a ouvert le circuit des bornes 3, 4; mais ce circuit a été fermé par M_4 . Dès lors, la pompe ne s'est pas éteinte. Si maintenant le vide devient mauvais, M_2 lâche, M_4 lâche, M_5 reste fermé. La pompe à diffusion s'éteint. M_3 , M_4 , M_5 sont alimentés par un redresseur S et une capacité C_3 .

La jauge Phillips n'est pas endommagée si elle opère à haute pression et vu sa grande portée et sa sensibilité dans les pressions qui nous intéressent, il était naturel de la choisir pour contrôler les sécurités.

Tout l'appareillage décrit ci-dessus a été concentré dans un panneau du tableau de contrôle général de la machine de Van de Graaff et est relié par de longs câbles blindés aux jauges.

G. C. TAVERNIER

Y. HECQ

Institut Interuniversitaire de Physique Nucléaire

Centre de Louvain

Avril 1950.

Revue des Questions Scientifiques

Cette revue, fondée en 1877 par la Société scientifique de Bruxelles, se compose actuellement de cinq séries : la **première série** comprend 30 volumes (1877-1891) ; la **deuxième**, 20 volumes (1892-1901) ; la **troisième**, 30 volumes (1902-1921) ; la **quatrième**, 30 vol. (1922-1936). La livraison de janvier 1937 inaugure la **cinquième série**.

La revue fut interrompue par la guerre, après le deuxième fascicule, avril 1940, du tome 117 de la collection. Ce tome fut achevé par les fascicules de février et juillet 1946.

Depuis 1947, paraît chaque année un volume, en quatre fascicules d'environ 160 pages chacun, 20 janvier, 20 avril, 20 juillet, 20 octobre.

Depuis 1947 la Revue est aussi l'organe de l'UNION CATHOLIQUE DES SCIENTIFIQUES FRANÇAIS.

Administration et Rédaction : 11, rue des Récollets, Louvain (Belgique.)

PRIX D'ABONNEMENT:

Belgique, Congo belge et Grand-Duché de Luxembourg	200 francs belges
abonnement de soutien	500 francs
abonnement d'honneur	1000 francs
France et colonies françaises (s'adresser au Centre du	
Livre français, 1, rue de la Visitation, Paris 7 ^e) . . .	800 francs franç.
Autres pays (s'adresser au Secrétariat, à Louvain) . . .	280 francs belges

PUBLICATIONS DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE

EXTRAIT DU CATALOGUE

ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES, t. I à t. XLVI, 1875 à 1926. Chaque vol. in-8° de 400 à 600 pages fr. 150,00

TABLES ANALYTIQUES DES ANNALES,

t. I à XXV (1875 à 1901) fr. 20,00
t. XXVI à XLVI (1902 à 1926) fr. 40,00

ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES,

Série A (sc. mathématiques), t. XLVII à t. LVI (1927 à 1936) fr. 70,00

Série B (sc. physiques et naturelles) » fr. 70,00

Série C (sc. médicales) 1927 et 1928) fr. 100,00 — (1929 à 1933) fr. 40,00
(1931 à 1936) fr. 20,00

Série D (sc. économ. et techniques) (1927 à 1929) fr. 20,00 — (1930) fr. 60,00
(1931 à 1936) fr. 100,00

Série I (sc. mathématiques et physiques), tt. LVII à LXIII (1937 à 1949) fr. 70,00

Série II (sc. naturelles et médicales), tt. LVII à LX (1937 à 1940, 46) fr. 70,00

Série III (sc. économiques), tt. LVII à LX (1937 à 1940, 46) fr. 100,00

REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES,

t. I à XCII (1877 à 1927). Les deux volumes annuels fr. 200,00

Le fascicule trimestriel fr. 60,00

t. XCIII à CXVI (1928 à 1939). Les deux volumes annuels fr. 200,00

Le fascicule fr. 40,00

t. CXVII (1940 et 1946). tt. CXVIII à CXX (1947 à 1949) Le volume fr. 200,00

Le fascicule fr. 60,00

TABLES ANALYTIQUES DE LA REVUE.

t. I à L (1877 à 1901) fr. 20,00

t. LI à LXXX (1902 à 1921) fr. 20,00

t. LXXXI à CX (1922 à 1936) fr. 30,00

MONOGRAPHIES DES SCIENCES NATURELLES

I. — **B. Tougareinoff**. Les réactions organiques dans l'analyse qualitative minérale (cations). — Un vol. in-8° de 107 pages (1930) : en Belgique, fr. 24,00 ; autres pays, 30,00 fr.

II. — **V. Schaffers**. Le paratonnerre et ses progrès récents. Un vol. in-8° de 90 pages (1931) : en Belgique, fr. 24,00 ; autres pays fr. 30,00.

IV. — **F. Kaisin et E. de Pierpont**. — Hydrogéologie des Calcaires de la Belgique. Un vol. in-8° de 111 pages, avec 35 fig. et un plan horstexte (1939) : en Belgique, fr. 24,00 ; autres pays, fr. 30,00. (épuisé)

MONOGRAPHIES MÉDICALES

I. — **M. Schillings**. Le rein en fer à cheval. Un vol. in-8° de 104 pages, avec 8 planches hors-texte (1928) : en Belgique, fr. 70,00 ; autres pays, fr. 90,00.

III. — **P. Van Gehuchten**. La pathologie du système pallido-strié. Un vol. in-8° de 52 pages, avec 8 planches hors-texte (1930) : en Belgique, fr. 24,00 ; autres pays, fr. 30,00.

MONOGRAPHIES DES SCIENCES ÉCONOMIQUES

I. — **A. Henry**. La structure technique de l'agriculture belge et ses particularités en Wallonie et en Flandre. Un vol. de 66 pages fr. 20,00

II. — **A. Henry**. Les variations régionales de l'Agriculture en Belgique. Un vol. de 50 pages fr. 10,00

III. — **A. Delpérée**. La réglementation conventionnelle des conditions de travail en Belgique. Un vol. de 200 pages fr. 60,00